**CHUYÊN ĐỀ : SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**I. Số chính phương:**

**A. Một số kiến thức:**

 Số chính phương: số bằng bình phương của một số khác

Ví dụ:

4 = 22; 9 = 32

A = 4n2 + 4n + 1 = (2n + 1)2 = B2

+ Số chính phương khơng tận cùng bởi các chữ số: 2, 3, 7, 8

+ Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4, chia hết cho 3 thì chia hết cho 9, chia

hết cho 5 thì chia hết cho 25, chia hết cho 23 thì chia hết cho 24,…

+ Số  = a thì  = 9a 9a + 1 =  + 1 = 10n

**B. Một số bài toán:**

1. Bài 1:

Chứng minh rằng: Một số chính phương chia cho 3, cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1

Giải

Gọi A = n2 (n N)

a) xét n = 3k (k N)  A = 9k2 nên chia hết cho 3

n = 3k  1 (k N)  A = 9k2  6k + 1, chia cho 3 dư 1

Vậy: số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1

b) n = 2k (k N) thì A = 4k2 chia hết cho 4

n = 2k +1 (k N) thì A = 4k2 + 4k + 1 chia cho 4 dư 1

Vậy: số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1

Chú ý: + Số chính phương chẵn thì chia hết cho 4

 + Số chính phương lẻ thì chia cho 4 thì dư 1( Chia 8 củng dư 1)

2. Bài 2: Số nào trong các số sau là số chính phương

a) M = 19922 + 19932 + 19942

b) N = 19922 + 19932 + 19942 + 19952

c) P = 1 + 9100 + 94100 + 1994100

d) Q = 12 + 22 + ...+ 1002

e) R = 13 + 23 + ... + 1003

Giải

a) các số 19932, 19942 chia cho 3 dư 1, còn 19922 chia hết cho 3  M chia cho 3 dư 2 do đó M không là số chính phương

b) N = 19922 + 19932 + 19942 + 19952 gồm tổng hai số chính phương chẵn chia hết cho 4, và hai số chính phương lẻ nên chia 4 dư 2 suy ra N không là số chính phương

c) P = 1 + 9100 + 94100 + 1994100 chia 4 dư 2 nên không là số chính phương

d) Q = 12 + 22 + ...+ 1002

Số Q gồm 50 số chính phương chẵn chia hết cho 4, 50 số chính phương lẻ, mỗi số chia 4 dư 1 nên tổng 50 số lẻ đó chia 4 thì dư 2 do đó Q chia 4 thì dư 2 nên Q không là số chính phương

e) R = 13 + 23 + ... + 1003

Gọi Ak = 1 + 2 +... + k =  , Ak – 1 = 1 + 2 +... + k = 

Ta có: Ak2 – Ak -12 = k3 khi đó:

13 = A12

23 = A22 – A12

.....................

n3 = An2 = An - 12

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta có:

13 + 23 + ... +n3 = An2 =  là số chính phương

**3. Bài 3:**

CMR: Với mọi n Ỵ N thì các số sau là số chính phương.

a) A = (10n +10n-1 +...+.10 +1)(10 n+1 + 5) + 1

A = ()(10 n+1 + 5) + 1 

 Đặt a = 10n+1 thì A =  (a + 5) + 1 = 

b) B = 6 ( cĩ n số 1 và n-1 số 5)

B =  + 1 = . 10n +  + 1 = . 10n + 5 + 1

Đặt  = a thì 10n = 9a + 1 nên

B = a(9a + 1) + 5a + 1 = 9a2 + 6a + 1 = (3a + 1)2= 

c) C =.+ + 1

Đặt a =  Thì C =  + 4.  + 1 = a. 10n + a + 4 a + 1

= a(9a + 1) + 5a + 1 = 9a2 + 6a + 1 = (3a + 1)2

d) D = 81 . Đặt  = a  10n = a + 1

D = . 10n + 2 + 8. 10n + 1 + 1 = a . 100 . 10n + 80. 10n + 1

 = 100a(a + 1) + 80(a + 1) + 1 = 100a2 + 180a + 81 = (10a + 9)2 = ()2

e) E = 5 = 00 + 25 = .10n + 2 + 2. 00 + 25

= [a(9a + 1) + 2a]100 + 25 = 900a2 + 300a + 25 = (30a + 5)2 = (5)2

f) F =  = 4. là số chính phương thì  là số chính phương

Số  là số lẻ nên nó là số chính phương thì chia cho 4 phải dư 1

Thật vậy: (2n + 1)2 = 4n2 + 4n + 1 chia 4 dư 1

 có hai chữ số tận cùng là 11 nên chia cho 4 thì dư 3

vậy  không là số chính phương nên F =  không là số chính phương

**Bài 4:**

a) Cho các số A = ; B = ; C = 

CMR: A + B + C + 8 là số chính phương .

Ta có: A  ; B =  ; C =  Nên:

A + B + C + 8 =  +  +  + 8 = 

=  = 

b) CMR: Với mọi x,y Ỵ Z thì A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y4 là số chính phương.

A = (x2 + 5xy + 4y2) (x2 + 5xy + 6y2) + y4

= (x2 + 5xy + 4y2) [(x2 + 5xy + 4y2) + 2y2) + y4

= (x2 + 5xy + 4y2)2 + 2(x2 + 5xy + 4y2).y2 + y4 = [(x2 + 5xy + 4y2) + y2)2

 = (x2 + 5xy + 5y2)2

**Bài 5:** Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương

a) n2 – n + 2 b) n5 – n + 2

Giải

a) Với n = 1 thì n2 – n + 2 = 2 không là số chính phương

Với n = 2 thì n2 – n + 2 = 4 là số chính phương

Với n > 2 thì n2 – n + 2 không là số chính phương Vì

(n – 1)2 = n2 – (2n – 1) < n2 – (n - 2) < n2

b) Ta có n5 – n chia hết cho 5 Vì

n5 – n = (n2 – 1).n.(n2 + 1)

Với n = 5k thì n chia hết cho 5

Với n = 5k  1 thì n2 – 1 chia hết cho 5

Với n = 5k  2 thì n2 + 1 chia hết cho 5

Nên n5 – n + 2 chia cho 5 thì dư 2 nên n5 – n + 2 có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên

n5 – n + 2 không là số chính phương

Vậy : Không có giá trị nào của n thoã mãn bài toán

**Bài 6 :**

a)Chứng minh rằng : Mọi số lẻ đều viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương

b) Một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn

Giải

Mọi số lẻ đều có dạng a = 4k + 1 hoặc a = 4k + 3

Với a = 4k + 1 thì a = 4k2 + 4k + 1 – 4k2 = (2k + 1)2 – (2k)2

Với a = 4k + 3 thì a = (4k2 + 8k + 4) – (4k2 + 4k + 1) = (2k + 2)2 – (2k + 1)2

b)A là số chính phương có chữ số tận cùng bằng 9 nên

A = (10k  3)2 =100k2  60k + 9 = 10.(10k2 6) + 9

Số chục của A là 10k2  6 là số chẵn (đpcm)

**Bài 7:**

Một số chính phương có chữ số hàng chục là chữ số lẻ. Tìm chữ số hàng đơn vị

Giải

Gọi n2 = (10a + b)2 = 10.(10a2 + 2ab) + b2 nên chữ số hàng đơn vị cần tìm là chữ số tận cùng của b2

Theo đề bài , chữ số hàng chục của n2 là chữ số lẻ nên chữ số hàng chục của b2 phải lẻ

Xét các giá trị của b từ 0 đến 9 thì chỉ có b2 = 16, b2 = 36 có chữ số hàng chục là chữ số lẻ, chúng đều tận cùng bằng 6

Vậy : n2 có chữ số hàng đơn vị là 6

**Bài tập về nhà:**

Bài 1: Các số sau đây, số nào là số chính phương

a) A = 4 b) B = 11115556 c) C = 25 d) D = 9 e) M =–  f) N = 12 + 22 + ...... + 562

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để các biểu thức sau là số chính phương

a) n3 – n + 2

b) n4 – n + 2

Bài 3: Chứng minh rằng

a)Tổng của hai số chính phương lẻ không là số chính phương

b) Một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ

Bài 4: Một số chính phương có chữ số hàng chục bằng 5. Tìm chữ số hàng đơn vị