**CHUYÊN ĐỀ - CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN**

**I. Dạng 1: Chứng minh quan hệ chia hết**

**1. Kiến thức:**

\* Để chứng minh A(n) chia hết cho một số m ta phân tích A(n) thành nhân tử có một nhân tử làm hoặc bội của m, nếu m là hợp số thì ta lại phân tích nó thành nhân tử có các đoi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh A(n) chia hết cho các số đó

\* Chú ý:

+ Với k số nguyên liên tiếp bao giờ củng tồn tại một bội của k

+ Khi chứng minh A(n) chia hết cho m ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A(n) cho m

+ Với mọi số nguyên a, b và số tự nhiên n thì:

+) an - bn chia hết cho a - b (a - b)

+) a2n + 1 + b2n + 1 chia hết cho a + b

+ (a + b)n  = B(a) + bn

+) (a + 1)n là BS(a )+ 1

+)(a - 1)2n là B(a) + 1

+) (a - 1)2n + 1 là B(a) - 1

**2. Bài tập:**

**2. Các bài toán**

**Bài 1:** chứng minh rằng

a) 251 - 1 chia hết cho 7  b) 270 + 370 chia hết cho 13

c) 1719 + 1917 chi hết cho 18 d) 3663 - 1 chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 37

e) 24n -1 chia hết cho 15 với n N

Giải

a) 251 - 1 = (23)17 - 1  23 - 1 = 7

b) 270 + 370 (22)35 + (32)35 = 435 + 935  4 + 9 = 13

c) 1719 + 1917 = (1719 + 1) + (1917 - 1)

1719 + 1  17 + 1 = 18 và 1917 - 1  19 - 1 = 18 nên (1719 + 1) + (1917 - 1)

hay 1719 + 1917  18

d) 3663 - 1  36 - 1 = 35  7

3663 - 1 = (3663 + 1) - 2 chi cho 37 dư - 2

e) 2 4n - 1 = (24) n - 1  24 - 1 = 15

**Bài 2:** chứng minh rằng

a) n5 - n chia hết cho 30 với n  N ;

b) n4 -10n2 + 9 chia hết cho 384 với mọi n lẻ n Z

c) 10n+18n -28 chia hết cho 27 với n N ;

Giải:

a) n5 - n = n(n4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n2 + 1) = (n - 1).n.(n + 1)(n2 + 1) chia hết cho 6 vì

(n - 1).n.(n+1) là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3 (\*)

Mặt khác n5 - n = n(n2 - 1)(n2 + 1) = n(n2 - 1).(n2 - 4 + 5) = n(n2 - 1).(n2 - 4 ) + 5n(n2 - 1)

= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n2 - 1)

Vì (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5

5n(n2 - 1) chia hết cho 5

Suy ra (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n2 - 1) chia hết cho 5 (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra đpcm

b) Đặt A = n4 -10n2 + 9 = (n4-n2 ) - (9n2 - 9) = (n2 - 1)(n2 - 9) = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n + 3)

Vì n lẻ nên đặt n = 2k + 1 (k  Z) thì

A = (2k - 2).2k.(2k + 2)(2k + 4) = 16(k - 1).k.(k + 1).(k + 2)  A chia hết cho 16 (1)

Và (k - 1).k.(k + 1).(k + 2) là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên A có chứa bội của 2, 3, 4 nên A là bội của 24 hay A chia hết cho 24 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 16. 24 = 384

c) 10 n+18n -28 = ( 10 n - 9n - 1) + (27n - 27)

+ Ta có: 27n - 27  27 (1)

+ 10 n - 9n - 1 = [( + 1) - 9n - 1] =  - 9n = 9(  - n)  27 (2)

vì 9  9 và  - n  3 do  - n là một số có tổng các chữ số chia hết cho 3

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

**3. Bài 3:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì

a) a3 - a chia hết cho 3

b) a7 - a chia hết cho 7

Giải

a) a3 - a = a(a2 - 1) = (a - 1) a (a + 1) là tích của ba số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3 nên (a - 1) a (a + 1) chia hết cho 3

b) ) a7 - a = a(a6 - 1) = a(a2 - 1)(a2 + a + 1)(a2 - a + 1)

Nếu a = 7k (k  Z) thì a chia hết cho 7

Nếu a = 7k + 1 (k Z) thì a2 - 1 = 49k2 + 14k chia hết cho 7

Nếu a = 7k + 2 (k Z) thì a2 + a + 1 = 49k2 + 35k + 7 chia hết cho 7

Nếu a = 7k + 3 (k Z) thì a2 - a + 1 = 49k2 + 35k + 7 chia hết cho 7

Trong trường hợp nào củng có một thừa số chia hết cho 7

Vậy: a7 - a chia hết cho 7

**Bài 4:** Chứng minh rằng A = 13 + 23 + 33 + ...+ 1003 chia hết cho B = 1 + 2 + 3 + ... + 100

Giải

Ta có: B = (1 + 100) + (2 + 99) + ...+ (50 + 51) = 101. 50

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có: A = (13 + 1003) + (23 + 993) + ... +(503 + 513)

= (1 + 100)(12 + 100 + 1002) + (2 + 99)(22 + 2. 99 + 992) + ... + (50 + 51)(502 + 50. 51 + 512) = 101(12 + 100 + 1002 + 22 + 2. 99 + 992 + ... + 502 + 50. 51 + 512) chia hết cho 101 (1)

Lại có: A = (13 + 993) + (23 + 983) + ... + (503 + 1003)

Mỗi số hạng trong ngoặc đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chi hết cho B

**Bài tập về nhà**

Chứng minh rằng:

a) a5 – a chia hết cho 5

b) n3 + 6n2 + 8n chia hết cho 48 với mọi n chẵn

c) Cho a l à số nguyên tố lớn hơn 3. Cmr a2 – 1 chia hết cho 24

d) Nếu a + b + c chia hết cho 6 thì a3 + b3 + c3 chia hết cho 6

e) 20092010 không chia hết cho 2010

f) n2 + 7n + 22 không chia hết cho 9

**II. Dạng 2: Tìm số dư của một phép chia**

**Bài 1:**

Tìm số dư khi chia 2100

a)cho 9, b) cho 25, c) cho 125

Giải

a) Luỹ thừa của 2 sát với bội của 9 là 23 = 8 = 9 - 1

Ta có : 2100 = 2. (23)33 = 2.(9 - 1)33 = 2.[B(9) - 1] = B(9) - 2 = B(9) + 7

Vậy: 2100 chia cho 9 thì dư 7

b) Tương tự ta có: 2100 = (210)10 = 102410 = [B(25) - 1]10 = B(25) + 1

Vậy: 2100 chia chop 25 thì dư 1

c)Sử dụng công thức Niutơn:

2100 = (5 - 1)50 = (550 - 5. 549 + … + . 52 - 50 . 5 ) + 1

Không kể phần hệ số của khai triển Niutơn thì 48 số hạng đầu đã chứa thừa số 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên đều chia hết cho 53 = 125, hai số hạng tiếp theo: . 52 - 50.5 cũng chia hết cho 125 , số hạng cuối cùng là 1

Vậy: 2100 = B(125) + 1 nên chia cho 125 thì dư 1

**Bài 2:**

Viết số 19951995 thành tổng của các số tự nhiên . Tổng các lập phương đó chia cho 6 thì dư bao nhiêu?

Giải

Đặt 19951995 = a = a1 + a2 + …+ an.

Gọi  =  + a - a

= (a1 3 - a1) + (a2 3 - a2) + …+ (an 3 - an) + a

Mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 6 vì mỗi dấu ngoặc là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Chỉ cần tìm số dư khi chia a cho 6

1995 là số lẻ chia hết cho 3, nên a củng là số lẻ chia hết cho 3, do đó chia cho 6 dư 3

**Bài 3:** Tìm ba chữ số tận cùng của 2100 viết trong hệ thập phân

giải

Tìm 3 chữ số tận cùng là tìm số dư của phép chia 2100 cho 1000

Trước hết ta tìm số dư của phép chia 2100 cho 125

Vận dụng bài 1 ta có 2100 = B(125) + 1 mà 2100 là số chẵn nên 3 chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 126, 376, 626 hoặc 876

Hiển nhiên 2100 chia hết cho 8 vì 2100 = 1625 chi hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó chia hết cho 8

trong các số 126, 376, 626 hoặc 876 chỉ có 376 chia hết cho 8

Vậy: 2100 viết trong hệ thập phân có ba chữ số tận cùng là 376

Tổng quát: Nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì 3 chữ số tận cùng của nó là 376

**Bài 4:** Tìm số dư trong phép chia các số sau cho 7

a) 2222 + 5555 b)31993

c) 19921993 + 19941995 d)

Giải

a) ta có: 2222 + 5555 = (21 + 1)22 + (56 – 1)55 = (BS 7 +1)22 + (BS 7 – 1)55

= BS 7 + 1 + BS 7 - 1 = BS 7 nên 2222 + 5555 chia 7 dư 0

b) Luỹ thừa của 3 sát với bội của 7 là 33 = BS 7 – 1

Ta thấy 1993 = BS 6 + 1 = 6k + 1, do đó:

31993= 3 6k + 1 = 3.(33)2k = 3(BS 7 – 1)2k = 3(BS 7 + 1) = BS 7 + 3

c) Ta thấy 1995 chia hết cho 7, do đó:

19921993 + 19941995 = (BS 7 – 3)1993 + (BS 7 – 1)1995 = BS 7 – 31993 + BS 7 – 1

Theo câu b ta có 31993 = BS 7 + 3 nên

19921993 + 19941995 = BS 7 – (BS 7 + 3) – 1 = BS 7 – 4 nên chia cho 7 thì dư 3

d)  = 32860 = 33k + 1 = 3.33k = 3(BS 7 – 1) = BS 7 – 3 nên chia cho 7 thì dư 4

**Bài tập về nhà**

Tìm số d ư khi:

a) 21994 cho 7

b) 31998 + 51998 cho 13

c) A = 13 + 23 + 33 + ...+ 993 chia cho B = 1 + 2 + 3 + ... + 99

**III. Dạng 3: Tìm điều kiện để xảy ra quan hệ chia hết**

**Bài 1:** Tìm n  Z để giá trị của biểu thức A = n3 + 2n2 - 3n + 2 chia hết cho giá trị của biểu thức B = n2 - n

Giải

Chia A cho B ta có: n3 + 2n2 - 3n + 2 = (n + 3)(n2 - n) + 2

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho n2 - n = n(n - 1) do đó 2 chia hết cho n, ta có:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 1 | - 1 | 2 | - 2 |
| n - 1 | 0 | - 2 | 1 | - 3 |
| n(n - 1) | 0 | 2 | 2 | 6 |
|  | loại |  |  | loại |

Vậy: Để giá trị của biểu thức A = n3 + 2n2 - 3n + 2 chia hết cho giá trị của biểu thức

B = n2 - n thì n 

**Bài 2:**

a) Tìm n  N để n5 + 1 chia hết cho n3 + 1

b) Giải bài toán trên nếu n  Z

Giải

Ta có: n5 + 1  n3 + 1  n2(n3 + 1) - (n2 - 1)  n3 + 1  (n + 1)(n - 1)  n3 + 1

 (n + 1)(n - 1)  (n + 1)(n2 - n + 1)  n - 1  n2 - n + 1 (Vì n + 1  0)

a) Nếu n = 1 thì 0 1

Nếu n > 1 thì n - 1 < n(n - 1) + 1 < n2 - n + 1 nên không thể xẩy ra n - 1  n2 - n + 1

Vậy giá trụ của n tìm được là n = 1

b) n - 1  n2 - n + 1  n(n - 1)  n2 - n + 1  (n2 - n + 1 ) - 1  n2 - n + 1

 1  n2 - n + 1. Có hai trường hợp xẩy ra:

+ n2 - n + 1 = 1  n(n - 1) = 0  (Tm đề bài)

+ n2 - n + 1 = -1  n2 - n + 2 = 0 (Vô nghiệm)

**Bài 3:** Tìm số nguyên n sao cho:

a) n2 + 2n - 4  11 b) 2n3 + n2 + 7n + 1  2n - 1

c) n4 - 2n3 + 2n2 - 2n + 1  n4 - 1 d) n3 - n2 + 2n + 7  n2 + 1

Giải

a) Tách n2 + 2n - 4 thành tổng hai hạng tử trong đó có một hạng tử là B(11)

n2 + 2n - 4  11  (n2 - 2n - 15) + 11  11 (n - 3)(n + 5) + 11  11

 (n - 3)(n + 5)  11

b) 2n3 + n2 + 7n + 1 = (n2 + n + 4) (2n - 1) + 5

Để 2n3 + n2 + 7n + 1  2n - 1 thì 5  2n - 1 hay 2n - 1 là Ư(5) 

Vậy: n  thì 2n3 + n2 + 7n + 1  2n - 1

c) n4 - 2n3 + 2n2 - 2n + 1  n4 - 1

Đặt A = n4 - 2n3 + 2n2 - 2n + 1 = (n4 - n3) - (n3 - n2) + (n2 - n) - (n - 1)

= n3(n - 1) - n2(n - 1) + n(n - 1) - (n - 1) = (n - 1) (n3 - n2 + n - 1) = (n - 1)2(n2 + 1)

B = n4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n2 + 1)

A chia hết cho b nên n   1  A chia hết cho B  n - 1  n + 1  (n + 1) - 2  n + 1

 2  n + 1  

Vậy: n   thì n4 - 2n3 + 2n2 - 2n + 1  n4 - 1

d) Chia n3 - n2 + 2n + 7 cho n2 + 1 được thương là n - 1, dư n + 8

Để n3 - n2 + 2n + 7  n2 + 1 thì n + 8  n2 + 1  (n + 8)(n - 8)  n2 + 1 65  n2 + 1

Lần lượt cho n2 + 1 bằng 1; 5; 13; 65 ta được n bằng 0; 2; 8

Thử lại ta có n = 0; n = 2; n = 8 (T/m)

Vậy: n3 - n2 + 2n + 7  n2 + 1 khi n = 0, n = 8

**Bài tập về nhà:**

Tìm số nguyên n để:

a) n3 – 2 chia hết cho n – 2

b) n3 – 3n2 – 3n – 1 chia hết cho n2 + n + 1

c)5n – 2n chia hết cho 63

**IV. Dạng 4: Tồn tại hay không tồn tại sự chia hết**

**Bài 1:** Tìm n  N sao cho 2n – 1 chia hết cho 7

Giải

Nếu n = 3k ( k  N) thì 2n – 1 = 23k – 1 = 8k - 1 chia hết cho 7

Nếu n = 3k + 1 ( k  N) thì 2n – 1 = 23k + 1  – 1 = 2(23k – 1) + 1 = BS 7 + 1

Nếu n = 3k + 2 ( k  N) thì 2n – 1 = 23k + 2  – 1 = 4(23k – 1) + 3 = BS 7 + 3

V ậy: 2n – 1 chia hết cho 7 khi n = BS 3

**Bài 2:** Tìm n  N để:

a) 3n – 1 chia hết cho 8

b) A = 32n + 3 + 24n + 1 chia hết cho 25

c) 5n – 2n chia hết cho 9

Giải

a) Khi n = 2k (k N) thì 3n – 1 = 32k – 1 = 9k – 1 chia hết cho 9 – 1 = 8

Khi n = 2k + 1 (k N) thì 3n – 1 = 32k + 1  – 1 = 3. (9k – 1 ) + 2 = BS 8 + 2

Vậy : 3n – 1 chia hết cho 8 khi n = 2k (k N)

b) A = 32n + 3 + 24n + 1 = 27 . 32n + 2.24n = (25 + 2) 32n + 2.24n = 25. 32n + 2.32n  + 2.24n

= BS 25 + 2(9n + 16n)

Nếu n = 2k +1(k N) thì 9n + 16n = 92k + 1 + 162k + 1 chia hết cho 9 + 16 = 25

Nếu n = 2k (k N) thì 9n có chữ số tận cùng bằng 1 , còn 16n có chữ số tận cùng bằng 6

suy ra 2((9n + 16n) có chữ số tận cùng bằng 4 nên A không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 25

c) Nếu n = 3k (k N) thì 5n – 2n = 53k – 23k chia hết cho 53 – 23 = 117 nên chia hết cho 9

Nếu n = 3k + 1 thì 5n – 2n = 5.53k – 2.23k = 5(53k – 23k) + 3. 23k = BS 9 + 3. 8k

= BS 9 + 3(BS 9 – 1)k = BS 9 + BS 9 + 3

Tương tự: nếu n = 3k + 2 thì 5n – 2n không chia hết cho 9