**CHUYÊN ĐỀ HOÁN VỊ, TỔ HỢP,CHỈNH HỢP, NHỊ THỨC**

**CHUYÊN ĐỀ 2: HOÁN VỊ, TỔ HỢP**

**A. KIẾN THỨC:**

**I. Chỉnh hợp:**

1. định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của tập hợp X ( 1  k  n) theo một thứ tự nhất định gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu 

2. Tính số chỉnh chập k của n phần tử

 = n(n - 1)(n - 2)…[n - (k - 1)]

**II. Hoán vị:**

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập hợp X theo một thứ tự nhất định gọi là một hoán vị của n phần tử ấy

Số tất cả các hoán vị của n phần tử được kí hiệu Pn

2. Tính số hoán vị của n phần tử

Pn =  = n(n - 1)(n - 2) …2 .1 = n!

( n! : n giai thừa)

**III. Tổ hợp:**

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi tập con của X gồm k phần tử trong n phần tử của tập hợp X ( 0  k  n) gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu 

2. Tính số tổ hợp chập k của n phần tử

 =  : k! = 

**B. Ví dụ:**

1. Ví dụ 1:

Cho 5 chữ số: 1, 2, 3, 4, 5

a) có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên

c)Có bao nhiêu cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên

Giải:

a) số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử:  = 5.(5 - 1).(5 - 2) = 5 . 4 . 3 = 60 số

b) số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên là hoán vị cua 5 phần tử (chỉnh hợp chập 5 của 5 phần tử):

  = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3).(5 - 4) = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 số

c) cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử:

  =  nhóm

2. Ví dụ 2:

Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Dùng 5 chữ số này:

a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số trong đó không có chữ số nào lặp lại? Tính tổng các số lập được

b) lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

c) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau

d) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, trong đó có hai chữ số lẻ, hai chữ số chẵn

Giải

a) số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi 4 trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử:  = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3) = 5 . 4 . 3 . 2 = 120 số

Trong mỗi hang (Nghìn, trăm, chục, đơn vị), mỗi chữ số có mặt: 120 : 5 = 24 lần

Tổng các chữ số ở mỗi hang: (1 + 2 + 3 + 4 + 5). 24 = 15 . 24 = 360

Tổng các số được lập: 360 + 3600 + 36000 + 360000 = 399960

b) chữ số tận cùng có 2 cách chọn (là 2 hoặc 4)

bốn chữ số trước là hoán vị của của 4 chữ số còn lại và có P4 = 4! = 4 . 3 . 2 = 24 cách chọn

Tất cả có 24 . 2 = 48 cách chọn

c) Các số phải lập có dạng , trong đó : a có 5 cách chọn, b có 4 cách chọn (khác a), c có 4 cách chọn (khác b), d có 4 cách chọn (khác c), e có 4 cách chọn (khác d)

Tất cả có: 5 . 4 . 4 . 4 . 4 = 1280 số

d) Chọn 2 trong 2 chữ số chẵn, có 1 cách chọn

chọn 2 trong 3 chữ số lẻ, có 3 cách chọn. Các chữ số có thể hoán vị, do đó có:

1 . 3 . 4! =1 . 3 . 4 . 3 . 2 = 72 số

Bài 3: Cho . Trên Ax lấy 6 điểm khác A, trên Ay lấy 5 điểm khác A. trong 12 điểm nói trên (kể cả điểm A), hai điểm nào củng được nối với nhau bởi một đoạn thẳng.

Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là 3 trong 12 điểm ấy

Giải

**Cách 1:** Tam giác phải đếm gồm ba loại:

+ Loại 1: các tam giác có một đỉnh là A, đỉnh thứ 2 thuộc Ax (có 6 cách chọn), đỉnh thứ 3 thuộc Ay (có 5 cách chọn), gồm có: 6 . 5 = 30 tam giác

+ Loại 2: Các tam giác có 1 đỉnh là 1 trong 5 điểm B1, B2, B3, B4, B5 (có 5 cách chọn), hai đỉnh kia là 2 trong 6 điểm A1, A2, A3, A4, A5, A6 ( Có  cách chọn)

Gồm 5 . 15 = 75 tam giác

+ Loại 3: Các tam giác có 1 đỉnh là 1 trong 6 điểm A1, A2, A3, A4, A5, A6 hai đỉnh kia là 2 trong 5 điểm B1, B2, B3, B4, B5 gồm có: 6.  tam giác

Tất cả có: 30 + 75 + 60 = 165 tam giác

Cách 2: số các tam giác chọn 3 trong 12 điểm ấy là 

Số bộ ba điểm thẳng hang trong 7 điểm thuộc tia Ax là: 

Số bộ ba điểm thẳng hang trong 6 điểm thuộc tia Ay là: 

Số tam giác tạo thành: 220 - ( 35 + 20) = 165 tam giác

**D. BÀI TẬP:**

**Bài 1:** cho 5 số: 0, 1, 2, 3, 4. từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Có 5 chữ số gồm cả 5 chữ số ấy?

b) Có 4 chữ số, có các chữ số khác nhau?

c) có 3 chữ số, các chữ số khác nhau?

d) có 3 chữ số, các chữ số có thể giống nhau?

**Bài 2:** Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số lập bởi các chữ số 1, 2, 3 biết rằng số đó chia hết cho 9

**Bài 3:** Trên trang vở có 6 đường kẻ thẳng đứng và 5 đường kẻ nằm ngang đôi một cắt nhau. Hỏi trên trang vở đó có bao nhiêu hình chữ nhật

**CHUYÊN ĐỀ 3 - LUỸ THỪA BẬC N CỦA MỘT NHỊ THỨC**

**A. KIẾN THỨC VÀ BÀI TẬP VẬN DỤNG:**

I. Nhị thức Niutơn:

(a + b)n = an + an - 1 b + an - 2 b2 + …+ ab n - 1 + bn

Trong đó: 

II. Cách xác định hệ số của khai triển Niutơn:

1. Cách 1: Dùng công thức 

Chẳng hạn hệ số của hạng tử a4b3 trong khai triển của (a + b)7 là 

Chú ý: a)  với quy ước 0! = 1  

b) Ta có:  =  nên 

2. Cách 2: Dùng tam giác Patxcan

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Đỉnh |  |  |  |  |  |  | **1** |  |  |  |  |  |  |
| Dòng 1(n = 1) |  |  |  |  |  | **1** |  | **1** |  |  |  |  |  |
| Dòng 2(n = 1) |  |  |  |  | **1** |  | **2** |  | **1** |  |  |  |  |
| Dòng 3(n = 3) |  |  |  | **1** |  | **3** |  | **3** |  | **1** |  |  |  |
| Dòng 4(n = 4) |  |  | **1** |  | **4** |  | **6** |  | **4** |  | **1** |  |  |
| Dòng 5(n = 5) |  | **1** |  | **5** |  | **10** |  | **10** |  | **5** |  | **1** |  |
| Dòng 6(n = 6) | **1** |  | **6** |  | **15** |  | **20** |  | **15** |  | **6** |  | **1** |

Trong tam giác này, hai cạnh bên gồm các số 1; dòng k + 1 được thành lập từ dòng k

 (k 1), chẳng hạn ở dòng 2 (n = 2) ta có 2 = 1 + 1, dòng 3 (n = 3): 3 = 2 + 1, 3 = 1 + 2

dòng 4 (n = 4): 4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3, 4 = 3 + 1, …

Với n = 4 thì: (a + b)4 = a4 + 4a3b + 6a2b2 + 4ab3 + b4

Với n = 5 thì: (a + b)5 = a5 + 5a4b + 10a3b2 + 10a2b3 + 5ab4 + b5

Với n = 6 thì: (a + b)6 = a6 + 6a5b + 15a4b2 + 20a3b3 + 15a2 b4 + 6ab5 + b6

**3. Cách 3:**

Tìm hệ số của hạng tử đứng sau theo các hệ số của hạng tử đứng trước:

a) Hệ số của hạng tử thứ nhất bằng 1

b) Muốn có hệ số của của hạng tử thứ k + 1, ta lấy hệ số của hạng tử thứ k nhân với số mũ của biến trong hạng tử thứ k rồi chia cho k

Chẳng hạn: (a + b)4= a4 + a3b + a2b2 +  ab3 +  b5

Chú ý rằng: các hệ số của khai triển Niutơn có tính đối xứng qua hạng tử đứng giữa, nghĩa

là các hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối có hệ số bằng nhau

(a + b)n = an + nan -1b + an - 2b2 + …+ a2bn - 2 + nan - 1bn - 1 + bn

**B. Ví dụ:**

**1. Ví dụ 1:** phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) A = (x + y)5 - x5  - y5

Cách 1: khai triển (x + y)5 rồi rút gọn A

A = (x + y)5 - x5  - y5 = ( x5 + 5x4y + 10x3y2 + 10x2y3 + 5xy4 + y5) - x5  - y5

 = 5x4y + 10x3y2 + 10x2y3 + 5xy4 = 5xy(x3 + 2x2y + 2xy2 + y3)

 = 5xy [(x + y)(x2 - xy + y2) + 2xy(x + y)] = 5xy(x + y)(x2 + xy + y2)

Cách 2: A = (x + y)5 - (x5  + y5)

x5  + y5 chia hết cho x + y nên chia x5  + y5 cho x + y ta có:

x5  + y5 = (x + y)(x4 - x3y + x2y2 - xy3 + y4) nên A có nhân tử chung là (x + y), đặt (x + y) làm nhân tử chung, ta tìm được nhân tử còn lại

b) B = (x + y)7 - x7 - y7 = (x7+7x6y +21x5y2 + 35x4y3 +35x3y4 +21x2y5 7xy6 + y7) - x7 - y7

 = 7x6y + 21x5y2 + 35x4y3 + 35x3y4 + 21x2y5 + 7xy6

 = 7xy[(x5 + y5 ) + 3(x4y+ xy4) + 5(x3y2 + x2y3 )]

 = 7xy {[(x + y)(x4 - x3y + x2y2 - xy3 + y4) ] + 3xy(x + y)(x2 - xy + y2) + 5x2y2(x + y)}

 = 7xy(x + y)[x4 - x3y + x2y2 - xy3 + y4 + 3xy(x2 + xy + y2) + 5x2y2 ]

 = 7xy(x + y)[x4 - x3y + x2y2 - xy3 + y4 + 3x3y - 3x2y2 + 3xy3 + 5x2y2 ]

 = 7xy(x + y)[(x4 + 2x2y2 + y4) + 2xy (x2 + y2) + x2y2 ] = 7xy(x + y)(x2 + xy + y2 )2

**Ví dụ 2:**Tìm tổng hệ số các đa thức có được sau khi khai triển

a) (4x - 3)4

Cách 1: Theo cônh thức Niu tơn ta có:

(4x - 3)4 = 4.(4x)3.3 + 6.(4x)2.32 - 4. 4x. 33 + 34 = 256x4 - 768x3 + 864x2 - 432x + 81

 Tổng các hệ số: 256 - 768 + 864 - 432 + 81 = 1

b) Cách 2: Xét đẳng thức (4x - 3)4 = c0x4 + c1x3 + c2x2 + c3x + c4

Tổng các hệ số: c0 + c1 + c2 + c3 + c4

Thay x = 1 vào đẳng thức trên ta có: (4.1 - 3)4 = c0 + c1 + c2 + c3 + c4

Vậy: c0 + c1 + c2 + c3 + c4 = 1

\* Ghi chú: Tổng các hệ số khai triển của một nhị thức, một đa thức bằng giá trị của đa

thức đó tại x = 1

**C. BÀI TẬP:**

Bài 1: Phân tích thành nhân tử

a) (a + b)3 - a3 - b3 b) (x + y)4 + x4 + y4

Bài 2: Tìm tổng các hệ số có được sau khi khai triển đa thức

a) (5x - 2)5 b) (x2 + x - 2)2010 + (x2 - x + 1)2011