**BÀI TÂP CHƯƠNG TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG**

**Bài 1:** Cho ABC vuông tại A, Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của Ac và BF.

Chứng minh rằng:

a) AH = AK b) AH2 = BH. CK

Giải : Đặt AB = c, AC = b.

BD // AC (cùng vuông góc với AB)

nên 

Hay  (1)

AB // CF (cùng vuông góc với AC) nên 

Hay  (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AH = AK

b) Từ  và  suy ra (Vì AH = AK)

 AH2 = BH . KC

**Bài 2:** Cho hình bình hành ABCD, đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD, BC, DC theo thứ tự tại E, K, G. Chứng minh rằng:

a) AE2 = EK. EG b) 

c) Khi đường thẳng a thay đổi vị trí nhưng vẫn qua A thì tích BK. DG có giá trị không đổi

Giải

a) Vì ABCD là hình bình hành và K  BC nên

AD // BK, theo hệ quả của định lí Ta-lét ta có:



b) Ta có:  ;  nên

   (đpcm)

c) Ta có:  (1);  (2)

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có:  không đổi

(Vì a = AB; b = AD là độ dài hai cạnh của hình bình hành ABCD không đổi)

**Bài 3:** Cho tứ giác ABCD, các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1:2. Chứng minh rằng:

a) EG = FH b) EG vuông góc với FH

Giải Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CF, DG

Ta có CM =  CF = BC  

EM // AC   (1)

Tương tự, ta có: NF // BD  (2)

mà AC = BD (3) Từ (1), (2), (3) suy ra : EM = NF (a)

Tương tự như trên ta có: MG // BD, NH // AC và MG = NH = AC (b)

Mặt khác EM // AC; MG // BD Và AC  BD EM  MG  (4)

Tương tự, ta có: (5) Từ (4) và (5) suy ra  (c)

Từ (a), (b), (c) suy ra EMG = FNH (c.g.c)  EG = FH

b) Gọi giao điểm của EG và FH là O; của EM và FH là P; của EM và FN là Q thì

  mà (đối đỉnh), (EMG = FNH)

Suy ra   EO  OP  EG  FH

**Bài 4:** Cho ABC ( AB < AC)

các phân giác BD, CE

a) Đường thẳng qua D và song song với BC

cắt AB ở K, chứng minh E nằm giữa B và K

b) Chứng minh: CD > DE > BE

Giải a) BD là phân giác nên

 (1)

Mặt khác KD // BC nên  (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

  E nằm giữa K và B

b) Gọi M là giao điểm của DE và CB.

Ta có (Góc so le trong) 

mà E nằm giữa K và B nên  >  >   >   EB < DE

Ta lại có > > (Vì  = )

Suy ra CD > ED  CD > ED > BE

**Bài 5:** Cho ABC có, AB = 8 cm, BC = 10 cm.

a)Tính AC

b)Nếu ba cạnh của tam giác trên là ba số tự nhiên liên tiếp thì mỗi cạnh là bao nhiêu?

Giải

Cách 1: Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho:BD = BC

ACD  ABC (g.g)  

 = AB(AB + BC)

= 8(10 + 8) = 144  AC = 12 cm

Cách 2: Vẽ tia phân giác BE của ABE  ACB

= 8(8 + 10) = 144

 AC = 12 cm

b) Gọi AC = b, AB = a, BC = c thì từ câu a ta có b2 = a(a + c) (1)

Vì b > anên có thể b = a + 1 hoặc b = a + 2

+ Nếu b = a + 1 thì (a + 1)2= a2 + ac 2a + 1 = ac a(c – 2) = 1

a = 1; b = 2; c = 3(loại)

+ Nếu b = a + 2 thì a(c – 4) = 4

- Với a = 1 thì c = 8 (loại) - Với a = 2 thì c = 6 (loại)

- với a = 4 thì c = 6 ; b = 5 Vậy a = 4; b = 5; c = 6

**Bài 6:** Cho ABC cân tại A và O là trung điểm của BC. Một điểm O di động trên AB, lấy điểm E trên AC sao cho . Chứng minh rằng

a) DBOOCE b) DOE  DBOOCE

c) DO, EO lần lượt là phân giác của các góc BDE, CED

d) khoảng cách từ O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB

Giải

a) Từ    và (gt)  DBOOCE

b) Từ câu a suy ra  (1)

Vì B, O ,C thẳng hàng nên  (2)

trong tam giác EOC thì  (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra 

DOE và DBO có  (Do DBOOCE)

và  (Do OC = OB) và  nên DOE  DBOOCE

c) Từ câu b suy ra  DO là phân giác của các góc BDE

Củng từ câu b suy ra  EO là phân giác của các góc CED

c) Gọi OH, OI là khoảng cách từ O đến DE, CE thì OH = OI, mà O cố định nên OH không đổi OI không đổi khi D di động trên AB

**Bài 7:** Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB, AC tại E và F

****a) chứng minh DE + DF không đổi khi D di động trên BC

b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt FE tại K.

Chứng minh rằng K là trung điểm của FE

Giải

a) DE // AM   (1)

DF // AM   (2)

Từ (1) và (2) suy ra

DE + DF =  =  không đổi

b) AK // BC suy ra FKA  AMC (g.g)   (3)

 (2)

(Vì CM = BM)

Từ (1) và (2) suy ra  FK = EK hay K là trung điểm của FE

**Bài 8:** Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn AC,tia Dx cắt SC, AB, BC lần lượt tại I, M, N. Vẽ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD, BG vuông góc với AC. Gọi K là điểm đối xứng với D qua I. Chứng minh rằng

a) IM. IN = ID2 b) 

c) AB. AE + AD. AF = AC2

Giải

a) Từ AD // CM   (1) Từ CD // AN  (2)

Từ (1) và (2) suy ra =  hay ID2 = IM. IN

b) Ta có  (3)

Từ ID = IK và ID2 = IM. IN suy ra IK2 = IM. IN

   (4)

Từ (3) và (4) suy ra 

c) Ta có AGB  AEC AB. AE = AG(AG+CG) (5)

CGB  AFC (vì CB = AD)

AF . AD = AC. CG  AF . AD = (AG + CG) .CG (6)

Cộng (5) và (6) vế theo vế ta có: AB. AE + AF. AD = (AG + CG) .AG + (AG + CG) .CG

 AB. AE + AF. AD = AG2 +2.AG.CG + CG2 = (AG + CG)2 = AC2

Vậy: AB. AE + AD. AF = AC2

**Bài 9:** Cho tam giác ABC có BC bằng trung bình cộng của AC và AB; Gọi I là giao điểm của các phân giác, G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh: IG // BC

Giải Gọi khoảng cách từ a, I, G đến BC lần lượt là AH, IK, GD

Vì I là giao điểm của ba đường phân giác nên khoảng cách từ I đến ba cạnh AB, BC, CA bằng nhau và bằng IK. Vì I nằm trong tam giác ABC nên:

SABC  = SAIB + SBIC + SCIA BC.AH = IK(AB+BC+CA) (1)

Mà BC =   AB + CA = 2 BC (2)

Thay (2) vào (1) ta có: BC. AH = IK. 3BC  IK = AH (a)

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

SBGC  =  SABC  BC . GD =  BC. AH  GD =  AH (b)

Từ (a) và (b) suy ra IK = GD hay k/ cách từ I, G đến BC bằng nhau nên IG // BC

**Bài 10:** Cho điểm M di động trên đáy nhỏ AB của hình thang ABCD, Gọi O là giao điểm của hai cạnh bên DA, CB. Gọi G là giao điểm của OA và CM, H là giao điểm của OB và DM. CMR: Khi M di động trên AB thì tổng  không đổi

**Giải** Qua O kẻ đường thẳng song với AB cắt CM, DM theo thứ tự ở I và K. Theo định lí Talét ta có: ;  

(1)

Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt IK, CD theo thứ tự ở P và Q, ta có:  không đổi vì FO là khoảng cách từ O đến AB, MQ là đường cao của hình thang nên không đổi (2). Từ (1) và (2) suy ra  không đổi

**Bài 11:** Cho tam giác ABC (AB < AC), phân giác AD. Trên AB lấy điểm M, trên AC lấy điểm N sao cho BM = CN, gọi giao điểm của CM và BN là O, Từ O vẽ đường thẳng song song với AD cắt AC, AB tại E và F.

Chứng minh rằng: AB = CF; BE = CA

Giải.

AD là phân giác nên 

EI // AD  (góc đồng vị)

Mà  (đồng vị); (đối đỉnh)

Suy ra   AFE cân tại A  AE =AF (a)

Aùp dụng định lí Talét vào ACD , với I là giao điểm của EF với BC ta có  (1). AD là phân giác của  nên  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  (3). Kẻ đường cao AG của AFE . BP // AG

(P AD); CQ // AG (Q OI) thì  = 900

Gọi trung điểm của BC là K, ta có BPK = CQK (g.c.g)  CQ = BP

 BPD = CQI (g.c.g)  CI = BD (4)

Thay (4) vào (3) ta có   CF = BA (b) Từ (a) và (b) suy ra BE = CA

**Bài 12:** Cho tam giác ABC vuông tại A, (AC > AB), đường cao AH. Trên tia HC lấy D sao cho HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E. M là trung điểm BE.  
a) Chứng minh BEC đồng dạng với ADC.  
b) Tính số đo góc AHM.  
**Bài 13:** Cho tứ giác lồi ABCD. Tìm tập hợp điểm O nằm trong tứ giác sao cho hai tứ giác OBCD và OBAD có diện tích bằng nhau. *(Không yêu cầu chứng minh phần đảo).*

|  |  |
| --- | --- |
| **12** |  |
|  | a) Do DEC ABC (Hai tam giác vuông có  chung)  Xét BEC và ADC Có  chung kết hợp (\*) =>BECADC (g.c.g) |
| **b** | b) BECADC =>, AHD vuông cân tại H nên    M trung điểm BE nên: AM = MB = ME BMA vuông cân tại M  AB2 =2BM2 hay mà AB2 = BH.BC (HS phải c/m);  BH.BC = BE.BMBHMBECADC |
| **13** | Giả sử O là điểm nằm trong tứ giác thỏa mãn: SOBCD =SOBAD.  Từ O kẻ đường thẳng // BC cắt AB tại  D1, cắt AC tại B1. Nối OC, OB, AC, BD  và kẻ các đường cao ha, hb, hc như hình vẽ  . Khi đó: SOBCD = SBCD+SBOD=      SBODA =  Vì B1D1//BD nên Từ (1) và (2)  Từ đó HS lập luận suy ra B1D1 đi qua trrung điểm cuả AC.  Vậy O nằm trên đoạn B1D1­//BD và đi qua trung điểm AC |

**Bài 14**. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi E; F;G;H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC; CD; DA. M là giao điểm của CE và DF.

a. Chứng minh: Tứ giác EFGH là hình vuông.

b. Chứng minh DF CE và  MAD cân.

c .Tính diện tích  MDC theo a.

|  |
| --- |
|  |
| Chứng minh: EFGH là hình thoi. Chứng minh có 1 góc vuông.  Kết luận Tứ giác EFGH là Hình vuông |
| mà  vuông tại C  vuông tại M . Hay CE  DF.  Gọi N là giao điểm của AG và DF. Chứng minh tương tự: AG  DF GN//CM mà G là trung điểm DC nên  N là trung điểm DM. Trong MAD có AN vừa là đường cao vừa là trung tuyến  MAD cân tại A. |
| Do đó :  Mà : . Vậy : .  Trong  theo Pitago ta có :  .  Do đó : |

**Bài 15:** Cho tam giác ABC nhọn (AB<AC). Các đường cao AE, BF cắt nhau tại H. Gọi M trung điểm của BC, qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM, a cắt AB, AC lần lượt tại I và K.

a. Chứng minh ABC đồng dạng EFC.

b. Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK, b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D. Chứng minh NC = ND và HI = HK.

c. Gọi G là giao điểm của CH và AB. Chứng minh:

|  |
| --- |
|  |
| Ta có AEC BFC (g-g) nên suy ra  Xét ABC và EFC có và góc C chung nên suy ra ABC EFC ( c-g-c) |
| Vì CN //IK nên HM CN  M là trực tâm HNC  MN CH mà CH  AD (H là trực tâm tam giác ABC) nên MN // AD  Do M là trung điểm BC nên  NC = NDIH = IK ( theo Ta let) |
| Ta có:  Tương tự ta có  và    = +. Dấu ‘=’ khi tam giác ABC đều, mà theo gt thì AB < AC nên không xảy ra dấu bằng. |

**Bài 16:** Cho hình vuông ABCD. Trên BC lấy điểm E, qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AE, đường thẳng này cắt CD tại F. Gọi I là trung điểm của EF, AI cắt CD tại K. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt AI tại G.

1. Chứng minh AE = AF. b. Chứng minh tứ giác EGFK là hình thoi.

c. Chứng minh AKF đồng dạng CAF.

d. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho BE = BM. Tìm vị trí của điểm E trên cạnh BC để diện tích DEM đạt giá trị lớn nhất?

|  |
| --- |
|  |
| ABE = ADF (cạnh góc vuông, góc nhon) suy ra AE = AF |
| Tam giác AEF vuông cân suy ra AI EF (1) Tứ giác EGFK là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường vì IEG = IFK) (2)  Từ (1) và (2) suy ra EGFK là hình thoi |
| Xét AKF và CAF có chung góc F; Lại có tam giác EAF vuông cân nên =  suy ra hai tam giác đồng dạng |
| Gọi cạnh hình vuông là a . Đặt BE = BM = x suy ra CE = a – x ; AM = a – x  =  =  đạt giá trị lớn nhất là khi x –a = 0 tức x = a nghĩa là khi đó E trùng C |

Bài 17: Trong tam giác ABC, các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho: .

1. Chứng minh rằng: .
2. Cho AB = 5, BC = 8, CA = 7. Tính độ dài đoạn BD.

a) Đặt .

Ta có (\*)

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O. Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF.















(1)

Ta có (2)

(1) & (2)  (\*\*)

(\*) & (\*\*) .

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

, 

s

   

s

s



 (3) Ta lại có CD + BD = 8 (4) (3) & (4) BD = 2,5

**Bài 18**: Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB), đư­ờng cao AH (HBC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HA. Đ­ường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1. Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo .
2. Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của góc AHM
3. Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: .

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | + Hai tam giác ADC và BEC có:  Góc C chung.  (Hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng)  Do đó, chúng dồng dạng (c.g.c).  Suy ra: (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết).  Nên  do đó tam giác ABE vuông cân tại A. Suy ra: |
| 2 | Ta có:  (do )  mà  (tam giác AHD vuông cân tại H)  nên  (do )  Do đó  (c.g.c), suy ra: |
| 3 | Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là phân giác góc BAC.  Suy ra: , mà |
|  | Do đó: |

**Bài 19:** Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Điểm E thuộc cạnh BC, điểm F thuộc cạnh AD sao cho CE = AF. Các đường thẳng AE, BF cắt đường thẳng CD theo thứ tự tại M và N.

a.Chứng minh rằng: DN.CM = a2

b. Gọi K là giao điểm của NA và MB. Chưng minh rằng MKN = 900

c. Các điểm E, F có vị trí như thế nào thì MN có độ dài nhỏ nhất? Khi đó hãy tính diện tích của tam giác KMN theo a?

|  |  |
| --- | --- |
| a | K  A B  F  E  N D C M  Từ gt  AB // MN nên ta có:  CM.DN = AB2 = a2. |
| b | Theo chứng minh trên:  Nên  ( vì BA = CB)  Và ADN = MCB ( = 900) đồng dạng với  MBC = AND  Mà MBC + BMC = 900  AND + MBC = 900  Vậy MKN = 900 |
| c | Vì MN = ND + CD + CM  Nên MN nhỏ nhất ND + CM nhỏ nhất (Vì DC không đổi)  Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có:  ND + CM  Dấu “ =” sảy ra khi CM = DN = a  DF và CE lần lượt là đường trung bình của tam giác NBC và tam giác MAD. Hay E,F là trung điểm của BC và AD  Vậy MN đạt GTNN bằng 3a khi E,F là trung điểm của BC và AD.  Khí đó SKMN = SKAB + SNAD + SCBM + SABCD = SKAB + 2SABCD.  Lại vì tam giác KAB vuông cân tại K nên đường cao ứng với cạnh AB có độ dài bằng  Và SABCD = a2. Vậy SKMN = |

**Bài 20:**

1) Gọi H là hình chiếu của đỉnh B trên đường chéo AC của hình chữ nhật ABCD, M và K theo thứ tự là trung điểm của AH và CD. Tính số đo của góc BMK.

2) Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, trên đoạn BH lấy điểm M và trên trên đoạn CH lấy điểm N sao cho . CMR AM = AN.

**Lời giải**

1) Từ hình vẽ ( khá chính xác ) ta dự đoán góc AIJ = 900.Dựa vào yếu tố trung điểm mà đề đã cho mà vẽ thêm hình tạo sự liên kết giữa I và J .

Cách 1 : ( hình 1,2) Vẽ hình phụ khai thác yếu tố trung điểm





***Tóm tắt lời giải cho hình 1*** Gọi P là trung điểm của AH => PI là đường trung bỡnh của tam giỏc AHD => PI//AD mà AD⊥ AB hì IP ⊥ AB và P là trực tâm của △ABI . Từ đó tứ giác BPIJ là h.b.h ,⇒ BP // IJ mà BP ⊥ AI nên JI ⊥ AI .

1) Gọi P,Q lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C.   
Tam giác vuông AMC có đường cao MP => AM2=AP.AC   
Tam giác vuông ANB có đường cao NQ => AN2=AQ.AB   
Xột tam giỏc APB và AQC có:  Góc A chung   
Góc APB=AQC=90 độ => tam giác đồng dạng   
=> AP.AC=AQ.AB => AM2=AN2=> AM=AN