## Buổi 1.

## CHỦ ĐỀ 1+2. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**A. Tính đơn điệu của hàm số**

1. ***Định nghĩa:*** Cho hàm số xác định trên , với  là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

* Hàm số đồng biến (tăng) trên  nếu .
* Hàm số nghịch biến (giảm) trên  nếu .

1. ***Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:*** Giả sử hàm số có đạo hàm trên khoảng .

* Nếu hàm số đồng biến trên khoảng  thì .
* Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng  thì .

1. ***Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:*** Giả sử hàm số có đạo hàm trên khoảng .

* Nếu thì hàm số đồng biến trên khoảng .
* Nếu thì hàm số nghịch biến trên khoảng .
* Nếu thì hàm số không đổi trên khoảng .
* ***Chú ý.***
* Nếu  là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “ Hàm số  liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số liên tục trên đoạn và có đạo hàm trên khoảng thì hàm số đồng biến trên đoạn .
* Nếu ( hoặc ) và chỉ tại một số điểm hữu hạn của  thì hàm số đồng biến trên khoảng  ( hoặc nghịch biến trên khoảng ).

### *4. Kĩ năng cơ bản*

***4.1. Lập bảng xét dấu của một biểu thức*** 

***Bước 1.*** Tìm nghiệm của biểu thức ****, hoặc giá trị của *x* làm biểu thức **** không xác định.

***Bước 2.*** Sắp xếp các giá trị của *x* tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

***Bước 3.***Sử dụng máy tính tìm dấu của  trên từng khoảng của bảng xét dấu.

* 1. ***. Xét tính đơn điệu của hàm số***  ***trên tập xác định***

***Bước 1.***Tìm tập xác định *D*.

***Bước 2.*** Tính đạo hàm .

***Bước 3.***Tìm nghiệm của  hoặc những giá trị *x* làm cho  không xác định.

***Bước 4.***Lập bảng biến thiên.

***Bước 5.***Kết luận.

* 1. ***Tìm điều kiện của tham số m để hàm số***  ***đồng biến, nghịch biến trên khoảng***  ***cho trước.***

Cho hàm số  có tập xác định *D*, khoảng :

 Hàm số nghịch biến trên 

 Hàm số đồng biến trên 

** Chú ý:** Riêng hàm số thì :

* + - Hàm số nghịch biến trên 
    - Hàm số đồng biến trên 

\* Nhắc lại một số kiến thức liên quan:

Cho tam thức 

a)  b)

c) d)

* ***Chú ý***: Nếu gặp bài toán tìm *m* để hàm số đồng biến (*hoặc nghịch biến*) trên khoảng :
* *Bước 1*: Đưa bất phương trình  (*hoặc*),  về dạng  (hoặc ), .
* *Bước 2*: Lập bảng biến thiên của hàm số  trên .
* *Bước 3*: Từ bảng biến thiên và các điều kiện thích hợp ta suy ra các giá trị cần tìm của tham số *m*.

**B. Cực trị của hàm số**

1. ***Định nghĩa:*** Cho hàm số xác định và liên tục trên khoảng  (có thể  là ;  là ) và điểm .

* Nếu tồn tại số  sao cho  với mọi  và  thì ta nói hàm số  đạt **cực đại** tại .
* Nếu tồn tại số  sao cho  với mọi  và  thì ta nói hàm số  đạt **cực tiểu** tại .

1. ***Điều kiện đủ để hàm số có cực trị:*** Giả sử hàm số  liên tục trên và có đạo hàm trên  hoặc trên , với .

* Nếu  trên khoảng  và  trên  thì  là một điểm cực đại của hàm số .
* Nếu  trên khoảng  và  trên  thì  là một điểm cực tiểu của hàm số .

**Minh họa bằng bảng biến thiên**

* ***Chú ý.***
* Nếu hàm số đạt cực đại (cực tiểu) tại  thì  được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của hàm số;  được gọi là **giá trị cực đại** (**giá trị cực tiểu**) của hàm số, kí hiệu là , còn điểm  được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của đồ thị hàm số.
* Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại** (**cực tiểu**) và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

### *3. Kĩ năng cơ bản*

* 1. ***Quy tắc tìm cực trị của hàm số***
* **Quy tắc 1:**

***Bước 1.*** Tìm tập xác định của hàm số.

***Bước 2.*** Tính. Tìm các điểm tại đó bằng 0 hoặc không xác định.

***Bước 3.*** Lập bảng biến thiên.

***Bước 4.*** Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

* **Quy tắc 2:**

***Bước 1.*** Tìm tập xác định của hàm số.

***Bước 2.*** Tính. Giải phương trình và ký hiệu là các nghiệm của nó.

***Bước 3.*** Tính và  .

***Bước 4.*** Dựa vào dấu củasuy ra tính chất cực trị của điểm .

* 1. ***Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm số bậc ba*** 

Ta có

* Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình  có hai nghiệm phân biệt  . Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là :  .
* Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :



Hoặc sử dụng công thức  .

* Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

 với 

* 1. ***Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm trùng phương.***

Cho hàm số:  có đồ thị là .



có ba điểm cực trị có 3 nghiệm phân biệt.

Khi đó ba điểm cực trị là:  với 

Độ dài các đoạn thẳng: .

Các kết quả cần ghi nhớ:

*  vuông cân 



*  đều 



*  , ta có: 
* 
* Bán kính đường tròn ngoại tiếp  là 
* Bán kính đường tròn nội tiếp  là 
* Phương trình đường tròn ngoại tiếp  là: 

### II. LUYỆN TẬP

**A. Tính đơn điệu của hàm số**

**Bài 1:** Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1/ ;2/ 

3/  ; 4/ 

**Bài 2:** Cho hàm số  (1)

Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.

**HD giải.** *Tập xác định: D = R. .*

*(1) đồng biến trên R    *

**Bài 3:** Cho hàm số  (1)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng .

**HD giải.** *Tập xác định: D = R. . y có .*

*+ Nếu  thì     hàm số đồng biến trên R   thoả YCBT.*

*+ Nếu  thì   PT  có 2 nghiệm phân biệt . Khi đó hàm số đồng biến trên các khoảng .*

*Do đó hàm số đồng biến trên khoảng        (VN)*

*Vậy: .*

**Bài 4:** Cho hàm số  (1).

Tìm các giá trị của *m* để hàm số (1) đồng biến trong khoảng  với .

**HD giải.** *, .*

*+ Nếu m = 0  hàm số nghịch biến trên * ****** *m = 0 không thoả YCBT.*

*+ Nếu , hoặc .*

*Vậy hàm số đồng biến trong khoảng  với .*

* và *

**B. Cực trị của hàm số**

**Bài 1:** Tìm cực trị của các hàm số:

1) y =  2) y = 

3) y =  4) y = 

5)  6) 

**Bài 2:** Tìm m để hàm số:

1) y = đạt cực đại tại x = 2

2) y = đạt cực tiểu tại x = 1

3)  đạt cực tiểu tại x = 2

4)  đạt cực tiểu tại x = 2

5) đạt cực đại tại x = –1

**Bài 3:** Cho hàm số .

Tìm *m* để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho .

**HD giải.** *Ta có: . Hàm số có CĐ, CT   có 2 nghiệm phân biệt  .*

*Khi đó các điểm cực trị là .*

*    (thoả điều kiện).*

**Bài 4:** Cho hàm số , với  là tham số thực.

Xác định  để hàm số đã cho đạt cực trị tại  sao cho .

**HD giải.** *Ta có *

*+ Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại  PT  có hai nghiệm phân biệt *

* PT  có hai nghiệm phân biệt là .*

* *

*+ Theo định lý Viet ta có  Khi đó:*

* (2)*

*+ Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m cần tìm là  và *

**III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

* 1. Cho hàm số . Khẳng định nào sao đây là khẳng đinh đúng?

**A**. Hàm số nghịch biến trên khoảng .

**B**. Hàm số đồng biến trên khoảng .

**C**. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  và .

**D**. Hàm số đồng biến trên các khoảng  và .

* 1. Cho hàm số . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A**. Hàm số luôn nghịch biến trên .

**B**. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  và .

**C**. Hàm số đồng biến trên khoảng  và nghịch biến trên khoảng .

**D**. Hàm số luôn đồng biến trên .

* 1. Cho hàm số  và các khoảng sau:

(I): ; (II): ; (III): ;

Hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

**A**. Chỉ (I). **B**. (I) và (II). **C**. (II) và (III). **D**. (I) và (III).

* 1. Cho hàm số. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A**. Hàm số luôn nghịch biến trên .

**B**. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

**C**. Hàm số đồng biến trên các khoảng và .

**D**. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  và.

* 1. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên ?

**A**. . **B**. .

**C**. . **D**. .

* 1. Hàm số  nghịch biến trên các khoảng nào ?

**A.** và . **B**. .

**C.**  và . **D**.  và .

* 1. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

**A**. . **B**. . **C.** . **D**. .

* 1. Cho hàm số . Hàm số luôn đồng biến trên khi nào?

A. . B. .

C. . D. .

* 1. Cho hàm số . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng .

**B.** Hàm số đồng biến trên .

**C.** Hàm số đồng biến trên .

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng .

* 1. Tìm điều kiện để hàm số   có 3 điểm cực trị .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

* 1. Cho hàm số  có bảng biến thiên:

*x*24*y*00*y*3

Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số đạt cực đại tại . **B.** Hàm số đạt cực đại tại .

**C.** Hàm số đạt cực đại tại  . **D.** Hàm số đạt cực đại tại .

* 1. Cho hàm số  . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số đạt cực đại tại  và đạt cực tiểu tại .

**B.** Hàm số đạt cực tiểu tại  và đạt cực đại .

**C.** Hàm số đạt cực đại tại và cực tiểu tại .

**D.** Hàm số đạt cực đại tại và cực tiểu tại .

* 1. Cho hàm số . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.

**C.** Hàm số không có cực trị. **D.** Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

* 1. Biết đồ thị hàm số  có hai điểm cực trị . Viết phương trình đường

thẳng .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

* 1. Gọi  lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số . Tính giá trị của biểu thức  ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

* 1. Cho hàm số  . Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

* 1. Cho hàm số  . Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

* 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực đại tại  ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

* 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

* 1. Cho hàm số . Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là . Tính  ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

* 1. Tính hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số  .

**D.** . **B.** . **C.** . **A.** .

* 1. Xác định hàm số . Biết đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm  .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Hàm số nào dưới đây có cực trị?

**A.**  . **B.** .

**C.**  . **D.** .

* 1. Tìm các giá trị của tham số để đồ thị hàm số:  có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm  nội tiếp được một đường tròn.

**A.** **B.** **C.** **D.** Không tồn tại *m*.

* 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số để đồ thị hàm số:  có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

**A.** **B.** **C.** **D.** 

### IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| D | A | D | B | C | D | D | B | A | A | D | A | B | A | A | D | B | B | B | D |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| B | C | C | A | B |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Buổi 2.**

**Chủ đề 3+4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA**

**HÀM SỐ VÀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số**

***1. Định nghĩa:*** Cho hàm số  xác định trên miền 

* Số *M* gọi là giá trị lớn nhất của hàm số  trên  nếu: .

Kí hiệu:  hoặc .

* Số *m* gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên  nếu: .

Kí hiệu: hoặc 

***2. Kĩ năng cơ bản***

*Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên K (K có thể là khoảng, đoạn, nửa khoảng, ...)*

* 1. ***Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sử dụng bảng biến thiên***
* ***Bước 1.***Tính đạo hàm .
* ***Bước 2.*** Tìm các nghiệm của  và các điểm trên *K*.
* ***Bước 3.*** Lập bảng biến thiên của  trên *K*.
* ***Bước 4.*** Căn cứ vào bảng biến thiên kết luận 
  1. ***Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số không sử dụng bảng biến thiên***
* **Trường hợp 1.** Tập *K* là đoạn 
* ***Bước 1.***Tính đạo hàm .
* ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm  của phương trình  và tất cả các điểm  làm cho  không xác định.
* ***Bước 3.*** Tính , , , .
* ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận , .
* **Trường hợp 2.** Tập *K* là khoảng 
* ***Bước 1.***Tính đạo hàm .
* ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm  của phương trình  và tất cả các điểm  làm cho  không xác định.
* ***Bước 3.*** Tính , , , .
* ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận , .
* ***Chú ý:*** *Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

1. **Đường tiệm cận của đồ thị hàm số**

**1. Đường tiệm cận ngang**

* *Cho hàm số  xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng ,  hoặc ). Đường thẳng  là đường* ***tiệm cận ngang*** *(hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn*

**

* **Nhận xét**: Như vậy để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

**2. Đường tiệm cận đứng**

* *Đường thẳng  là đường* ***tiệm cận đứng*** *(hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn*

*.*

**Ngoài ra cần nhớ các kiến thức về giới hạn sau:**

**3) Quy tắc tìm giới hạn vô cực**

*Quy tắc tìm giới hạn của tích : Nếu  và  (hoặc ) thì * được tính theo quy tắc cho trong bảng sau

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  |

*Quy tắc tìm giới hạn của thương : Nếu  và  (hoặc ) thì * được tính theo quy tắc cho trong bảng sau

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | *Dấu của* |  |
| *0* |  | *Tùy ý* | *0* |
|  | *0* | *+* |  |
|  |  |
|  | *+* |  |
|  |  |

(Dấu của  xét trên một khoảng  nào đó đang tính giới hạn, với )

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp  và .

+) Nếu 

+) Nếu 

**II. LUYỆN TẬP**

**A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số**

**Bài 1:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/  trên đoạn .

b/ trên đoạn .

c/ trên đoạn .

d/ trên đoạn .

**HD giải.** a/ Tìm max – min của hàm số: .

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn.
* Ta có: 
* Tính



b/ Tìm max – min của hàm số: .

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn.
* Ta có: 
* Tính:



c/ Tìm max – min của hàm số: .

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn.
* Ta có: .
* Tính:



d/ Tìm max – min của hàm số: .

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn.
* Ta có: .
* Tính:



**Bài 2:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ . b/ .

c/ . d/ .

**HD giải.** a/ Tìm max – min của hàm số: 

\* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên .

* Ta có: .
* Bảng biến thiên:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

* Dựa vào bảng biến thiên và hàm số không có giá trị lớn nhất.

b/ Tìm max – min của hàm số: 

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên.
* Ta có: 
* Bảng biến thiên:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

* Dựa vào bảng biến thiên, ta được: và .

c/ Tìm max – min của hàm số: 

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên.
* Ta có: .
* Cho .
* Bảng biến thiên:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

* Dựa vào bảng biến thiên: .

d/ Tìm max – min của hàm số: 

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng.
* Ta có: .
* Hàm sốđạt giá trị lớn nhất trên khoảngkhi và chỉ khi hàm số:  đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng.
* Ta có.
* Vậy: .

**Bài 3:**

a/ Chu vi của một tam giác là, độ dài của một cạnh tam giác là. Tìm hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác có diện tích lớn nhất.

b/ Cho Parabol  và điểm . Xác định điểm  sao cho khoảng cách  là ngắn nhất. Tìm khoảng cách đó.

**HD giải.** a/ Gọi độ dài cạnh thứ nhất của tam giác là, cạnh thứ hai có độ dài là và cạnh thứ ba là.

* Theo đề bài ta có: 
* Công thức tính diện tích Δ theo Hêrông: .
* Ta có: .

.

* Bảng biến thiên:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 5 10 | | |
|  |  | + 0 – |  |
|  |  | 12 |  |

* Dựa vào bảng biến thiên: khi mỗi cạnh còn lại dài.

b/Gọi .

* Khoảng cách: .
* Ta có: .
* Bảng biến thiên:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | 0 |
|  |  |

Dựa vào bảng biến thiên: khi điểm.

**II. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số**

**1) Tìm giới hạn theo quy tắc**

**Ví dụ 1**. Tìm .

**Giải**. Ta có  (vì  và ).

**Ví dụ 2**. Tìm .

**Giải**. Ta có  (vì  và )

**Ví dụ 3**. Tìm .

**Giải**. Ta có ,  và . Do đó .

**Ví dụ 4**. Tìm .

**Giải**. Ta có ,  và . Do đó .

**2) Kĩ năng sử dụng máy tính**

**Ý tưởng**: *Giả sử cần tính  ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của  tại các giá trị của  rất gần .*

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

* thì nhập  và tính giá trị tại .*

* thì nhập  và tính giá trị tại .*

* thì nhập  và tính giá trị tại  hoặc .*

1. Giới hạn của hàm số tại vô cực

* thì nhập  và tính giá trị tại .*

* thì nhập  và tính giá trị tại .*

**Ví dụ 1.** Tìm giới hạn.

Giải. Nhập biểu thức . Ấn tổ hợp phím: . Máy hiện số 4.

CALC

=

Vậy .

**Ví dụ 2.** Tìm giới hạn.

Giải. Nhập biểu thức . Ấn tổ hợp phím: .

CALC

=

Máy hiện số -999999998. Vậy .

**Ví dụ 3.** Tìm giới hạn.

Giải. Nhập biểu thức . Ấn tổ hợp phím: . Máy hiện số 2.

CALC

=

Vậy.

**3) Dạng toán thường gặp: Tìm các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số** .

*Phương pháp:*

*- Tìm TXĐ của hàm số.*

*- Tìm các giới hạn của hàm số khi  rồi dựa vào định nghĩa các đường tiệm cận để kết luận.*

**Chú ý.**

* Đồ thị hàm số chỉ có thể có tiệm cận ngang khi TXĐ của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn (nghĩa là biến  có thể dần tới  hoặc ).
* Đồ thị hàm số chỉ có thể có tiệm cận đứng khi TXĐ của nó có một trong các dạng sau  hoặc là hợp của các tập hợp này và TXĐ không có một trong các dạng sau .
* Đối với hàm phân thức  trong đó  là hai đa thức của  ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

1. Tiệm cận đứng

Nếu  thì đường thẳng  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

1. Tiệm cận ngang

Nếu bậc của  bé hơn bậc của  thì đường thẳng  (trục hoành) là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Nếu bậc của  bằng bậc của  thì đường thẳng  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  trong đó  lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của  và .

Nếu bậc của  lớn hơn bậc của  thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Đặc biệt, mọi hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất  đồ thị đều có hai tiệm cận

Tiệm cận đứng ; tiệm cận ngang . Đồ thị nhận giao điểm của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

**Ví dụ 1.** Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số .

**Giải**. TXĐ: . Ta có

 nên đồ thị nhận đường thẳng  làm tiệm cận ngang.

 nên đồ thị nhận đường thẳng  làm tiệm cận đứng.

Chú ý: Có thể cho HS áp dụng luôn nhận xét ở phần trên để luyện tập.

**Ví dụ 2**. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số .

**Giải**. TXĐ: . Ta có

 và  nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là  và .

**Ví dụ 3**. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số .

**Giải**. TXĐ: . Ta có

 nên đồ thị nhận đường thẳng  làm tiệm cận ngang.

 nên đồ thị nhận đường thẳng  làm tiệm cận đứng.

**III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

1. Gọi  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên đoạn. Tính tích .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn .

**A.** Giá trị lớn nhất bằng. **B.** Giá trị lớn nhất bằng.

**C.** Giá trị lớn nhất bằng . **D.** Giá trị lớn nhất bằng.

1. Cho hàm số . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng  và không có giá trị lớn nhất.

**B.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng  và giá trị lớn nhất bằng .

**C.** Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

**D.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ  và giá trị lớn nhất bằng .

1. Hàm số  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất N của hàm số .

**A.** . **B.**  **C.** . **D.** .

1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** Không tồn tại.

1. Tìm điểm có hoành độ trên  để hàm số  đạt giá trị nhỏ nhất .

**A. **. **B.** .** C. ** và. ** D.** .****

1. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất N của hàm số .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên  .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

1. Hàm số  có giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M trên . Tính tổng m + M.

**A.** . **B.** 

**C.** . **D.** .

1. Tìm các giá trị của tham số *m* > 0 để hàm số  đạt giá trị nhỏ nhất trên  luôn bé hơn 3.

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Một công ti bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê, mỗi căn hộ thêm 50.000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ti đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ti có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

**A.** 115.250.000. **B.** 101.250.000.

**C.** 100.000.000. **D.** 100.250.000.

1. Doanh nghiêp Hồng Anh cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong *x* ngày và cho số tiền lãi là  ( triệu đồng ), máy B làm việc trong *y* ngày và cho số tiền lãi là  ( triệu đồng ). Hỏi doanh nghiệp Hồng Anh cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

**A.** 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

1. Một người thợ xây cần xây một bể chứa 108 m3 nước có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông và không có nắp. Hỏi chiều cao của lòng bể bằng bao nhiêu để số viên gạch dùng xây bể là ít nhất. Biết thành bể và đáy bể đều được xây bằng gạch, độ dày thành bể và đáy bể là như nhau, các viên gạch có kích thước như nhau và số viên gạch trên một đơn vị diện tích là bằng nhau.

**A.** 9m. **B.** 6m. **C.** 3m. **D.** 2m.

1. Kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường đại học kinh tế quốc dân Hà Nội. Kỳ I của năm thứ nhất gần qua, kỳ II sắp đến. Hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, kỳ I đã khó khăn, kỳ II càng khó khăn hơn. Gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50m, lấy tiền lo cho việc học của Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất, biết giá tiền 1m2 đất khi bán là 1500.000 VN đồng.

**A.** 112687500VN đồng. **B.** 114187500VN đồng.

**C.** 115687500VN đồng. **D.** 117187500VN đồng.

**Câu 16.** Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận ?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 17.** Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng là một đường tiệm cận ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 18.** Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 19.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  tạo với 2 trục tọa độ một hình vuông.

**A.** . **B.** . **C.** A và B sai. **D.** A và B đều đúng.

**Câu 21.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để khoảng cách từ giao điểm của 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số  tới gốc tọa độ O bằng.

**A.** . **B.** . **C.** A và B sai. **D.** A và B đều đúng.

**Câu 22.** Cho hàm số . Tìm tất cả các giá trị của tham số  để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nằm bên trái trục tung.

**A.** . **B.** . **C.**  tùy ý. **D.** .

**Câu 23.** Cho hàm số  có  và . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

**B.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

**C.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  và .

**D.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  và.

**Câu 24.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  để đồ thị hàm số  có hai đường tiệm cận ngang.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 25.** Cho hàm số . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| C | C | B | B | C | B | C | D | A | A | A | B | A | C | D | A | C | D | D | D |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| A | B | C | D | D |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Buổi 3.**

**CHỦ ĐỀ 5. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ**

**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**1. Sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số**

1. Tập xác định: Tìm tập xác định của hàm số.
2. Sự biến thiên của hàm số

* Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tiệm cận (nếu có).
* Xét chiều biến thiên của hàm số:

Tính đạo hàm. Tìm các điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Lập bảng biến thiên và kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số.

1. Đồ thị: Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

**2. Đồ thị hàm số bậc ba**: 

* Các dạng đồ thị của hàm số bậc 3:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Phương trình  y’ = 0  có hai nghiệm phân biệt |  |  |
| Phương trình  y’ = 0  có nghiệm kép |  |  |
| Phương trình  y’ = 0  vô nghiệm |  |  |

**3. Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương**: 

* Các dạng đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | a > 0 | a < 0 |
| y’= 0 có 1 nghiệm  (a.b > 0) | x  O  y | x  O  y |
| y’= 0 có 3 nghiệm  (a.b<0) | x  O  y | O  x  y |

**4) Đồ thị của hàm số **

Các dạng đồ thị hàm số:

**Chú ý**: Cần hướng dẫn học sinh cách “đọc” đồ thị để suy ra chiều biến thiên, lập bảng biến thiên trong mỗi trường hợp và chỉ ra các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có)

**5) Các phép biến đổi đồ thị**

*Cho hàm số  có đồ thị . Khi đó với số , ta có*

*+ Hàm số  có đồ thị  bằng cách tịnh tiến đồ thị  theo phương  lên trên  đơn vị.*

*+ Hàm số  có đồ thị  bằng cách tịnh tiến đồ thị  theo phương  lên trên  đơn vị.*

*+ Hàm số  có đồ thị  bằng cách tịnh tiến đồ thị  theo phương  sang trái  đơn vị.*

+ Hàm số  có đồ thị  bằng cách tịnh tiến đồ thị  theo phương  sang phải  đơn vị.

*+ Hàm số  có đồ thị  là đối xứng của đồ thị  qua trục .*

*+ Hàm số  có đồ thị  là đối xứng của đồ thị  qua trục .*

*+ Hàm số  có đồ thị  suy từ đồ thị  bằng cách:*

*Giữ nguyên phần đồ thị  nằm bên phải trục  và bỏ phần đồ thị  nằm bên trái .*

*Lấy đối xứng phần đồ thị  nằm bên phải  qua .*

*+ Hàm số  có đồ thị  suy từ đồ thị  bằng cách:*

*Giữ nguy ên phần đồ thị  nằm phía trên trục .*

*Lấy đối xứng phần đồ thị  nằm bên phía dưới  qua  và bỏ phần đồ thị  nằm dưới .*

**II. LUYỆN TẬP (KĨ NĂNG CƠ BẢN)**

**Dạng 1. Nhận dạng đồ thị hàm số**

**Ví dụ 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?**

|  |  |
| --- | --- |
| A.  B.  C.  D. |  |

***Hướng dẫn giải.*** Đây là dạng đồ thị hàm bậc 4 trùng phương với hệ số a > 0. Chọn **A.**

**Ví dụ 2. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?**

|  |  |
| --- | --- |
| A.  B.  C.  D. |  |

***Hướng dẫn giải***

Ta thấy đường cong là đồ thị của hàm bậc ba,  . Vậy đáp án là D.

**Ví dụ 3. Hàm số  có đồ thị là hình vẽ nào dưới đây?**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A. Hình 1. | B. Hình 2. | C. Hình 3. | D. Hình 4. |

***Hướng dẫn giải***

Do hàm số đã cho là hàm phân thức nên loại đáp án B và D.

 nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đáp án là C.

**Dạng 2. Dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên chỉ ra số nghiệm của phương trình**

**Ví dụ 4. Cho hàm số  xác định trên , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  sao cho phương trình có ba nghiệm thực phân biệt.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A. | B. | C. | D. |

***Hướng dẫn giải***

Phương trình có 3 nghiệm khi và chỉ khi đồ thị hàm số  cắt đường thẳng  tại 3 điểm phân biệt. Từ bảng biến thiên suy ra . Chọn **B**.

**Ví dụ 5. Cho hàm số  xác định, liên tục trên  và có bảng biến thiên:**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  sao cho phương trình  có hai nghiệm thực phân biệt.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A. | B. | C. | D. hoặc |

***Hướng dẫn giải***

Phương trình có 2 nghiệm khi và chỉ khi đồ thị hàm số  cắt đường thẳng  tại 2 điểm phân biệt. Từ BBT suy ra  hoặc  Chọn D.

**Ví dụ 6. Xét hàm số  có đồ thị (C) được cho ở hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình  có 2 nghiệm thực phân biệt .**

|  |  |
| --- | --- |
| A.  B.  hoặc  C.  hoặc  D.  hoặc |  |

**Ví dụ 7**. Cho hàm số  xác định, liên tục trên  và có bảng biến thiên :

x

y’

y

-

-1

1

+

0

0

+

-

+

4

+

-

0

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  sao cho phương trình  có đúng một nghiệm thực.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A. . | B.. | C. . | D. . |

***Hướng dẫn giải***

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số  và đường thẳng . Từ BBT ta được  . Chọn **D**.

**Ví dụ 8. Cho hàm số  xác định, liên tục trên  và có bảng biến thiên:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***x*** | – 0 2 **+** |
|  | – 0 + 0 – |
|  | + 3  –1 – |

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình  có nghiệm thực lớn hơn 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A. . | B.. | C. . | D. . |

***Hướng dẫn giải***

Nghiệm của phương trình  là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  và đường thẳng . Từ BBT ta được . Chọn **B**.

**Ví dụ 9. Cho hàm số  xác định trên , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | 0 |
|  |  |

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  sao cho phương trình  có hai nghiệm thực phân biệt .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A. | B. | C. | D. |

***Hướng dẫn giải***

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số giao điểm của đồ thị hàm số  và đường thẳng . Từ BBT ta được  . Chọn **A**.

**Ví dụ 10. Cho hàm số có đồ thị được cho ở hình 1. Đồ thị ở hình 2 là đồ thị của hàm số nào dưới đây?**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A.  B.  C.  D. | Hình 1. | Hình 2. |

***Hướng dẫn giải***

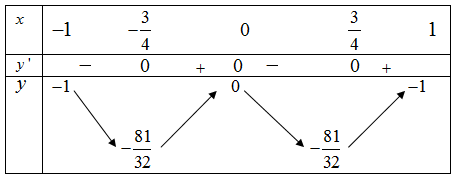
Cách 1. Đồ thị ở hình 2 được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở phía trên trục hoành Ox

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) ở dưới Ox qua Ox, bỏ đi phần đồ thị (C) ở dưới Ox.

+ Đồ thị thu được nằm hoàn toàn trên Ox. Đây là đồ thị hàm số . Chọn **B**.

Cách 2. Đồ thị ở hình 2 nằm ở phía trên trục hoành  . Chọn **B**.



**III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** **(ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)**

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 2.** Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

 **A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 3.** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 4.** Cho hàm số  có bảng biến thiên sau:



Đồ thị nào thể hiện hàm số ?

(Đáp án : A**).**

**Câu 5.** Cho hàm số  có đồ thị như hình bên.

 Chọn đáp án đúng?

**A.** Hàm số có hệ số .

**B.** Hàm số đồng biến trên các khoảng  và .

**C.** Hàm số không có cực trị.

**D.** Hệ số tự do của hàm số khác .

**Câu 6.** Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 7.** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 8.** Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 9.** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

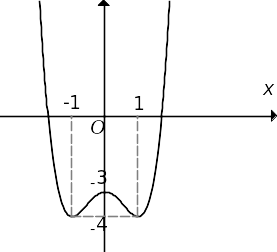
**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Câu 10.** Cho hàm số  có bảng biến thiên như sau. Chọn phát biểu sai?



y

**A**. Hàm số đồng biến trên các khoảng  và .

**B**. Hàm số đạt cực đại tại .

**C**. Đồ thị hàm số đã cho biểu diễn như hình bên.

**D**. Hàm số đã cho là .

**Câu 11.** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

**A**. 

**B**. 

**C**. 

**D**. 

**Câu 12.** Cho hàm số  có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

Hình 1 Hình 2

**A**.  **B**.  **C**. . **D**. 

**Câu 13.** Cho hàm số  có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

Hình 1 Hình 2

**A**.  **B**.  **C**.  **D**. 

**Câu 14.** Cho hàm số  liên tục trên  và có đồ thị như hình dưới đây.

(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng .

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng .

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là:

**A**. . **B**. . **C**. . **D**. .

**Câu 15.** Cho hàm số  có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

Hình 1 Hình 2

**A**.  **B**.  **C**.  **D**. 

**Câu 16.** Cho hàm số  có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

Hình 1 Hình 2

**A**.  **B**.  **C**.  **D**. 

**Câu 16.** Cho hàm số .

O

O

O

O

**(I) (II) (III) (IV)**

Các đồ thị nào có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho?

**A**. (I). **B**. (I) và (III). **C**. (II) và (IV). **D**. (III) và (IV).

**Câu 17.** Cho hàm số .

O

O

O

O

**(I) (II) (III) (IV)**

Trong các mệnh đề sau hãy chọn mệnh đề đúng:

**A**. Đồ thị (I) xảy ra khi  và  có hai nghiệm phân biệt.

**B**. Đồ thị (II) xảy ra khi  và  có hai nghiệm phân biệt.

**C**. Đồ thị (III) xảy ra khi  và  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

**D**. Đồ thị (IV) xảy ra khi  và  có có nghiệm kép.

**Câu 18.** Cho đường cong  có phương trình . Tịnh tiến  sang phải  đơn vị, ta được đường cong mới có phương trình nào sau đây?

**A**. . **B**. . **C**. . **D**. .

**Câu 19.** Tịnh tiến đồ thị hàm số  sang phải  đơn vị, sau đó lên trên  đơn vị ta được đồ thị hàm số nào dưới đây?

**A**. . **B**. . **C**. . **D**. .

**Câu 20.** Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào

x  -1 0 1 

y’ - 0 + 0 - 0 +

y  -3 

- 4 - 4

A. . B. . C. . D. .

**Câu 21.** Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x  0 

y’ - 0 +

y  

1

A.  B.  C.  D. 

**Câu 22.** Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x  - 1 

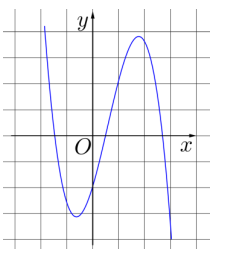
y’ + +

y  2

2 

A.  B.  C.  D. 

**Câu 23**. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A..

B. .

C. .

D. **.**

**Câu 24.** Cho hàm số  có đồ thị  cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ  như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.**

**B.**

**C.**

**D.**

**Câu 25**. Cho hàm số  xác định trên , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | 0 |
|  |  |

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  sao cho đường thẳng  cắt đồ thị hàm số  tại điểm có tung độ nhỏ hơn 0.

|  |  |
| --- | --- |
| A.  B. C. D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn. |  |

### IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| D | C | D | A | B | B | B | A | D | D | C | D | B |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| B | A | B | C | B | A | C | C | A | A | A | C |  |

**Buổi 4.**

**CHỦ ĐỀ 6. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA CÁC ĐỒ THỊ.**

**TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

# I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

**1)** *Cho hai đồ thị (C1): và (C2): . Để tìm hoành độ giao điểm của (C1) và (C2) ta giải phương trình:  (\*) (gọi là phương trình hoành độ giao điểm).*

*Số nghiệm của phương trình (\*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.*

*Nghiệm của phương trình (\*) chính là hoành độ giao điểm. Thay giá trị này vào một trong hai hàm số ban đầu ta được tung độ giao điểm.*

*Điểm  là giao điểm của (C1) và (C2).*

**2) Các dạng bài tập thường gặp và phương pháp giải**

**Bài toán 1. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số**

**Phương pháp:**

Cho 2 hàm số  có đồ thị lần lượt là (C) và (C’).

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C’): .

+) Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

+) Số nghiệm của (\*) là số giao điểm của (C) và (C’).

**Bài toán 2. Tương giao của đồ thị hàm bậc ba **

**Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)**

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng (phương trình ẩn x tham số m)

+) Cô lập m đưa phương trình về dạng .

+) Lập BBT cho hàm số .

+) Dựa vào giả thiết và BBT từ đó suy ra m.

**\*) Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp này khi m độc lập với x.

**Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.**

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm 

+) Nhẩm nghiệm (Khử tham số): Giả sử  là 1 nghiệm của phương trình.

+) Phân tích  ( là phương trình bậc 2 ẩn x tham số m ).

+) Dựa vào yêu cầu bài toán để xử lý phương trình bậc hai .

**Phương pháp 3: Cực trị**

**\*) Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.

**\*) Quy tắc:**

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm (1). Xét hàm số 

|  |  |
| --- | --- |
| +) Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị  cắt trục hoành tại đúng 1 điểm. (2TH)  - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên  hàm số không có cực trị  hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép  - Hoặc hàm số có CĐ, CT và  (hình vẽ) |  |
| +) Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị  cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt  Hàm số có cực đại, cực tiểu và |  |
| +) Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị  cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt  Hàm số có cực đại, cực tiểu và |  |

**Bài toán. Tìm m để đồ thị hàm bậc 3 cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành 1 cấp số cộng**

**a) Định lí Vi-ét**

\*) Cho bậc 2: Cho phương trình  có 2 nghiệm  thì ta có: 

\*) Cho bậc 3: Cho phương trình  có 3 nghiệm  thì ta có:



**c) Tính chất của cấp số cộng**

+) Cho 3 số  theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: 

**d) Phương pháp giải toán:**

+) Điều kiện cần:  là 1 nghiệm của phương trình. Từ đó thay vào phương trình để tìm m.

+) Điều kiện đủ: Thay m tìm được vào phương trình và kiểm tra.

**Bài toán 3. Tương giao của hàm phân thức**

**Phương pháp**

Cho hàm số  và đường thẳng . Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):  (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

\*) **Các câu hỏi thường gặp**:

**1.** Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt  có 2 nghiệm phân biệt khác .

**2.** Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C)  có 2 nghiệm phân biệt  và thỏa mãn .

**3.** Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C)  có 2 nghiệm phân biệt  và thỏa mãn .

**4.** Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C)  có 2 nghiệm phân biệt  và thỏa mãn .

**5.** Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:

+) Đoạn thẳng 

+) Tam giác  vuông.

+) Tam giác ABC có diện tích .

**\* Quy tắc:**

+) Tìm điều kiện tồn tại A, B  (1) có 2 nghiệm phân biệt.

+) Xác định tọa độ của A và B (chú ý định lý Vi-ét)

+) Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

**\*) Chú ý:** Công thức khoảng cách:

+) 

+) 

**Bài toán 4. Tương giao của hàm bậc 4 trùng phương**: 

**NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG:**  **(1)**

**1. Nhẩm nghiệm:**

- Nhẩm nghiệm: Giả sử  là một nghiệm của phương trình.

- Khi đó ta phân tích: 

- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai 

**2. Ẩn phụ - tam thức bậc 2:**

- Đặt . Phương trình:  (2).

- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm  thỏa mãn: 

- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm  thỏa mãn: 

- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm  thỏa mãn: 

- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm  thỏa mãn: 

**3. Bài toán: Tìm m để đồ thị hàm bậc bốn trùng phương (1) cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

- Đặt . Phương trình:  (2).

- Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương thỏa mãn .

- Kết hợp  vơi định lý Vi – ét tìm được m.

# TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

**Bài toán 1: Tiếp tuyến tại điểm  thuộc đồ thị hàm số:**

Cho hàm số  và điểm . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại M.

- Tính đạo hàm . Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là 

- Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: 

**Bài toán 2: Tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước**

- Gọi  là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.

- Giả sử  là tiếp điểm. Khi đó  thỏa mãn: (\*) .

- Giải (\*) tìm . Suy ra .

- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: 

**Bài toán 3: Tiếp tuyến đi qua điểm**

Cho hàm số  và điểm . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua A.

- Gọi  là đường thẳng qua A và có hệ số góc k. Khi đó (\*)

- Để  là tiếp tuyến của (C)  có nghiệm.

- Thay (2) vào (1) ta có phương trình ẩn x. Tìm x thay vào (2) tìm k thay vào (\*) ta có phương trình tiếp tuyến cần tìm.

***Cách khác:*** Gọi  là tiếp điểm. Vì .

PTTT của (C) tại  có dạng:  (1)

Tiếp tuyến đi qua  nên 

Giải phương trình với ẩn , thay vào (1) ta được PTTT.

**Chú ý:**

1. Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm  thuộc (C) là: 

2. Cho đường thẳng 

+)   +)  

+)  +) 

3. Tiếp tuyến tại các điểm cực trị của đồ thị (C) có phương song song hoặc trùng với trục hoành.

4. Cho hàm số bậc 3: 

+) Khi : Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

+) Khi : Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc lớn nhất.

**II. LUYỆN TẬP**

**Ví dụ 1.** Biện luận số giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:  (C) và y = m – x (d).

**HD giải.** Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

.

Biện luận:

Nếu hoặc  thì (C) và d có hai điểm chung.

Nếu hoặc  thì (C) và d có một điểm chung.

Nếu  thì (C) và d không có điểm chung.

**Chú ý**: Nhấn mạnh cho HS tùy theo yêu cầu của bài toán để chọn phương án thích hợp vì khi đó chỉ hỏi một ý trong bài.

**Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số (C):  cắt đường thẳng d: y = 6x + m tại ba điểm phân biệt.

1. . B. . C. . D. .

**HD giải.** Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

 (\*)

.

Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt  phương trình (\*) có ba nghiệm phân biệt  phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 . Chọn A.

**Ví dụ 3.** Cho hàm số  có đồ thị (C­­m). Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để (Cm) cắt đường thẳng y = - 1 tại bốn điểm phân biệt.

1. . B. . C. . D. .

**HD giải.** Phương trình hoành độ giao điểm:

 (1) .

Đặt , phương trình (1) trở thành:  (2).

Đồ thị (Cm) cắt đường thẳng y = - 1 tại bốn điểm phân biệt  phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt . Chọn D.

**Ví dụ 4.** Cho hàm số . Biết đồ thị hàm số đã cho luôn cắt đường thẳng  tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm giá trị của m sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất.

A.. B .. C.. D..

**HD giải.** Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

.

Ta có . Suy ra (C) luôn cắt d tại A và B với mọi m. Gọi . Ta có .

Lại có  là nghiệm của phương trình (\*) nên .





.

Do đó, độ dài đoạn AB nhỏ nhất bằng . Chọn C.

**Ví dụ 5.** Cho hàm số . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để  cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. . B. . C. . D. .

**HD giải.** Phương trình hoành độ giao điểm của (Cm) và trục hoành là:

 (1).

Đặt , phương trình (1) trở thành  (2).

Đồ thị  cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt  phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt .

Với  đồ thị  cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Gọi  là hai nghiệm của (2). Khi đó (1) có bốn nghiệm  là hoành độ giao điểm của (Cm) và trục hoành. Các hoành độ trên lập thành cấp số cộng thì  (3).

Ta cũng có  là nghiệm của (2) nên .

Từ (3)  vào (4) và (5) ta được: .

Ta có (7). Chọn B.

**Ví dụ 6.** Cho hàm số (1). Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi có hoành độ  thỏa mãn điều kiện .

A.. B. . C. . D. .

**HD giải.** Phương trình xác định hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

.

.

Đặt x3 = 1. Yêu cầu bài toán sẽ được thực hiện khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt  thỏa mãn điều kiện: .

Điều kiện để (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 là: .

Theo Viet ta có:  nên

.

Tổng hợp các điều kiện (a) và (b) ta được . Chọn A.

**Ví dụ 7.** Cho hàm số . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

a) Tại điểm có hoành độ bằng – 1.

b) Tại điểm có tung độ bằng 2.

c) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x + 7.

d) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng .

**HD giải.** Gọi là tiếp điểm.

a) Ta có . Từ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

y + 2 = 9(x + 1)y = 9x + 7.

b) Ta có .

Cho y0 = 2.

Với , y0 = 2, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 0( x – 0)y = 2.

Với , y0 = 2, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 9( x – 3)y = 9x – 25.

c) Gọi M(x0; y0) là tiếp điểm. Ta có . Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là

.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x + 7 nên .

Với , phương trình tiếp tuyến là: y + 2 = 9(x + 1)y = 9x + 7 (l).

Với , phương trình tiếp tuyến là: y – 2 = 9( x – 3)y = 9x – 25.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y = 9x – 25.

d) Gọi M(x0; y0) là tiếp điểm. Ta có .

Hệ số góc của tiếp tuyến là .

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  nên

.

Với phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 52 = 45( x – 5)y = 45x – 173.

Với phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 52 = 45( x + 3)y = 45x + 83.

**Ví dụ 8.** Cho đồ thị (C) của hàm số . Viết các phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến bằng .

A.. B. và .

C.  và . D. .

**HD giải.** Tiếp tuyến của (C) tại điểm  có phương trình

 hay  (\*).

Khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến (\*) bằng khi và chỉ khi

 hoặc .

Suy ra các tiếp tuyến cần tìm là:  và . Chọn B.

**Ví dụ 9.** Cho hàm số  (C). Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích hệ số góc bằng -9.

1. M(0; 3) và M(2; 5). B. M(0; 3) và M(-2; 5).

C. M(0; -3) và M(-2; 5). D. M(0; -3) và M(2; 5).

**HD giải.** Ta có I(-1; 2). Gọi .

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: .

x0 = 0; x0 = -2.

Suy ra có 2 điểm M thỏa mãn: M(0; -3) và M(-2; 5). Chọn C.

**III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1**. Cho hàm số . Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số và trục *Ox*.

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

**Câu 2**. Tìm số giao điểm của đường cong  và đường thẳng .

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

**Câu 3**. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng  và đường cong . Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN.

A. . B. 1. C. 2. D. .

**Câu 4** **(ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017).** Biết rằng đường thẳng  cắt đồ thị hàm số  tại điểm duy nhất; ký hiệu  là toạ độ của điểm đó. Tìm .

A. . B. . C. . D. .

**Câu 5**. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số  cắt đường thẳng  tại 3 điểm phân biệt.

A. . B. . C. *m>1.* D. *m<- 3.*

**Câu 6**. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng  cắt đồ thị hàm số  tại 3 điểm phân biệt.

A. *m>4.* B. . C. . D. .

**Câu 7**. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng  không cắt đồ thị hàm số .

A. . B. *m>4.* C. *m<0.* D. *m=0; m=4.*

**Câu 8**. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình  có 3 nghiệm phân biệt.

A. *m<-2.* B. *m>2.* C. . D. *m = -2.*

**Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình  có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

A. B. C. D.

**Câu 10.** Cho đường cong . Có bao nhiêu điểm trên đồ thị sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 đường tiệm cận của bằng 6?

A. B.  C.  D. 6.

**Câu 11.** Cho hàm số  có đồ thị . Gọi là tiếp tuyến với đồ thị tại điểm thuộc có hoành độ bằng 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để  vuông góc với đường thẳng 

A. B. C.  D.

**Câu 12.** Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số  với trục Oy. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị trên tại điểm M.

A.  B.  C.  D. 

**Câu 13.** Tìm sốcác tiếp tuyến đi qua gốc toạ độ *O* của đồ thị .

A. B. C. D.

**Câu 14.** Cho hàm số  Tìm hệ số góc  của tiếp tuyến với đồ thị (*C*) sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục *Ox*, *Oy* lần lượt tại các điểm *A*, *B* thoả mãn .

A. B. C. D. .

**Câu 15.** Tìm tất cả các giá trị của tham số để đường thẳng  là tiếp tuyến của đường cong .

A.. B.. C.. D.

**Câu 16**. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến có hệ số góc   
.

A. . B.  C.. D. .

**Câu 17.** Cho hàm số có đồ thị*.* Tìm các điểm *M* trên đồ thị sao cho khoảng cách từ hai điểm và**đến tiếp tuyến của tại là bằng nhau.

A.. B.  và .

C.. D.  và .

**Câu 18.** Tìm hệ số góc nhỏ nhất của các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số .

A.**.** B. **.** C. **.** D. **.**

**Câu 19.** Tìm tất cả các giá trị của tham số để qua điểm  kẻ được ba tiếp tuyến phân biệt đến đồ thị hàm số 

A.. B.. C.. D..

**Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đường thẳng  cắt đồ thị   
 tại  điểm phân biệt.

**A.**. B. . C. . D. .

**Câu 21.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đường thẳng  cắt đồ thị  tại hai điểm  sao cho .

**A*.***. B*.* . C*.* . D*.* .

**Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của tham số để phương trình  có  nghiệm phân biệt.

A*.* . B*.* . C*.* . D*.*hoặc.

**Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đường thẳng  cắt đồ thị hàm số  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  thỏa mãn .

A. B. C. D. 

**Câu 24.** Gọi  có tung độ bằng. Tiếp tuyến của  tại cắt các trục tọa độ ,  lần lượt tại  và . Tính diện tích  của tam giác .

A.  B.  C. D. 

**Câu 25.** Cho hàm số   và đường thẳng . Tìm giá trị của tham số  để  cắt  tại hai điểm phân biệt ,  sao cho  vuông tại .

A. . B. . C.. D. .

### IV. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |  |
| C | D | B | C | A | D | B | C | A | A | C | A |  |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| B | B | A | C | D | A | C | A | A | D | C | A | C |

**ĐỀ LUYỆN TẬP TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ**

**MA TRẬN ĐỀ**

**(Chuyên đề hàm số)**

1. Ma trận

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Cấp độ**  **Chủ đề** | **Nhận biết** | **Thông hiểu** | **Vận dụng** | | **Cộng** |
| **Cấp độ thấp** | **Cấp độ cao** |
| **Tính đơn điệu của hàm số** | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 4  Số điểm: 1,6  (16%) |
| Cực trị của hàm số | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 2  Số điểm: 0,8 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 |  | Số câu: 4  Số điểm: 1,6  (16%) |
| Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 |  | Số câu: 3  Số điểm: 1,2  (12%) |
| Đường tiệm cận của đồ thị hàm số | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 |  | Số câu: 3  Số điểm: 1,2  (12%) |
| Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 2  Số điểm: 0,8 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 |  | Số câu: 4  Số điểm: 1,6  (16%) |
| Một số bài toán thường gặp về đồ thị |  | Số câu: 3  Số điểm: 1,2 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 5  Số điểm: 2,0  (20%) |
| Ứng dụng thực tế |  |  | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 1  Số điểm: 0,4 | Số câu: 2  Số điểm: 0,8  (8%) |
| **Tổng** | Số câu: 5  Số điểm: 2,0  ( 20%) | Số câu: 10  Số điểm: 4,0  (40%) | Số câu: 7  Số điểm: 2,8  (28%) | Số câu: 3  Số điểm: 1,2  (12%) | Số câu: 25  Số điểm: 10  (100%) |

**2. Các chuẩn đánh giá**

|  |  |
| --- | --- |
| **Chủ đề** | **Chuẩn đánh giá** |
| **Tính đơn điệu của hàm số** | **I. Mức độ nhận biết:**  **-** Nhớ được điều kiện để hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng.  - Biết mối liên hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số và dấu của đạo hàm cấp một của nó.  - Nhận dạng được bảng biến thiên của một số hàm số đơn giản.  **Ví dụ.** Phát biểu nào sau đây là đúng?  **A**. Hàm số  nghịch biến trên  khi và chỉ khi .  **B**. Nếu  thì hàm số  nghịch biến trên .  **C**. Hàm số  nghịch biến trên  khi và chỉ khi .  **D**. Nếu  thì hàm số  nghịch biến trên .  **II. Mức độ thông hiểu**  - Biết xét tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó.  **Ví dụ**: Chỉ ra khoảng nghịch biến của hàm số  trong các khoảng dưới đây:  **A**. . **B**.  hoặc .  **C**. . **D**.  hoặc .  **III. Mức độ vận dụng thấp**  **-**Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số đồng biến, nghịch biến tìm điều kiện của tham số để hàm số thường gặp đơn điệu trên một khoảng.  **Ví dụ:**  Hàm số  nghịch biến trên khoảng  khi và chỉ khi:  **A**. . **B**. . **C**. . **D**. .  **IV. Mức độ vận dụng cao**  **-**Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số đồng biến, nghịch biến kết hợp phương pháp đổi biến tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng.  **Ví dụ:**Tìm tất cả giá trị thực của tham số  sao cho hàm số  đồng biến trên khoảng .  **A.**  hoặc . **B.** .  **C.** . **D.** . |
| **Cực trị của hàm số** | **I. Mức độ nhận biết:**  -Nhớ các khái niệm: Điểm cực đại, điểm cực tiểu, điểm cực trị của hàm số.  -Nhớ các điều kiện đủ để có các điểm cực trị của hàm số.  - Từ bảng biến thiên nhận dạng được các điểm cực trị của hàm số, của đồ thị hàm số.  **Ví dụ.** Cho hàm số  xác định, liên tục trên  và có bảng biến thiên như sau:    Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?  **A**. Hàm số có đúng một cực trị.  **B**. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.  **C**. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.  **D**. Hàm số đạt cực đại tại x=0 và đạt cực tiểu tại x=1.  **II. Mức độ thông hiểu**  - Tìm được điểm cực trị của hàm số, giá trị cực trị của hàm số và cực trị của đồ thị hàm số.  - Tìm điều kiện của tham số sao cho hàm bậc ba có hai cực trị, không có cực trị.  - Tìm điều kiện của tham số sao cho hàm bậc bốn có ba cực trị, một cực trị.  **Ví dụ**: Đồ thị của hàm số  có hai điểm cực trị là:  **A**. (0;0) hoặc (1;-2). **B**. (0;0) hoặc (2;4).  **C**. (0;0) hoặc (2;-4). **D**. (0;0) hoặc (-2;-4).  **III. Mức độ vận dụng thấp**  Vận dụng khái niệm, điều kiện hàm số có cực trị tìm điều kiện của tham số để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.  **Ví dụ:** Cho hàm số . Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài .  **A.** m=0**. B**. m=0 hoặc m=2. **C**. m=1. **D**. m=2. |
| **Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số** | **I. Mức độ nhận biết:**  -Nhớ các khái niệm giá trị lớn, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một tập hợp số.  -Từ bảng biến thiên nhận dạng được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất( nếu có) của hàm số trên một tập hợp số.  - Từ tính chất đơn điệu của hàm số trên một đoạn, nhận dạng được GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn đó.  **Ví dụ:** Giá trị lớn nhất của hàm số  trên đoạn  là  **A. 7. B. -143. C. 6. D. 8**  **II. Mức độ thông hiểu**  Tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất( nếu có) của hàm số trên một tập hợp số..  **Ví dụ**: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên đoạn .  **A**. . **B**.. **C**.. **D**..  **III. Mức độ vận dụng thấp**  Vận dụng khái niệm giá trị lớn, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một tập hợp số tìm giá trị của tham số để hàm số có GTLN, GTNN thỏa mãn điều kiện nào đó.  **Ví dụ:** Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên đoạn  bằng ?  **A**. . **B**. . **C**. . **D**. . |
| **Đường tiệm cận của đồ thị hàm số** | **I. Mức độ nhận biết:**  -Nhớ được khái niệm đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.  - Nhận dạng được tiệm cận của đồ thị của hàm số khi biết một số giới hạn.  - Nhận biết được số tiệm cận của một số đồ thị hàm số đơn giản.  **Ví dụ:** Cho hàm số  có  và . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?  **A.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.  **B.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.  **C.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  và  **D.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  và .  **II. Mức độ thông hiểu**  Tìm được tiệm cận của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn từ đó suy ra số tiệm cận của đồ thị hàm số.  **Ví dụ**: Đồ thị hàm số  có:  **A**. Tiệm cận đứng , tiệm cận xiên .  **B**. Tiệm cận đứng , tiệm cận xiên .  **C**. Tiệm cận đứng , tiệm cận xiên .  **D**. Kết quả khác.  **III. Mức độ vận dụng thấp**  Vận dụng khái niệm tiệm cận của đồ thị hàm số tìm giá trị của tham số để đồ thị hàm số có tiệm cận.  **Ví dụ:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số  có hai tiệm cận ngang.  **A.** Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.  **B.** . **C.** . **D.** . |
| **Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số** | **I. Mức độ nhận biết:**  **-** Nhận dạng được đồ thị của một số hàm thường gặp qua một số đặc điểm đặc trưng của đồ thị từng loại hàm khi cho biết nhiều loại hàm.  **Ví dụ:** Đồ thị sau đây là của hàm số nào?  **A.** .  **B.** .  **C.** .  **D.** .  **II.** **Mức độ thông hiểu**  Nhận dạng được đồ thị của một số hàm thường gặp qua một số dấu hiệu như nhánh vô cực, điểm trên đồ thị, tính đơn điệu, cực trị, tiệm cận khi cho biết một số hàm cùng loại…  - Từ đồ thị, biện luận theo tham số số nghiệm của phương trình.  **Ví dụ:**  Đồ thị sau đây là của hàm số nào?  **A**.  **B**.  **C**.  **D**.  **III. Mức độ vận dụng thấp**  Từ đồ thị của hàm số  tìm được đồ thị các hàm chứa dấu trị tuyệt đối liên quan.  **Ví dụ**: Cho hàm số  có đồ thị như Hình . Đồ thị Hình  là của hàm số nào dưới đây?    Hình  Hình  **A**.  **B**.  **C**.  **D**. |
| **Một số bài toán thường gặp về đồ thị** | **I.** **Mức độ thông hiểu**  - Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị.  - Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị hàm số.  **-** Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại tiếp điểm.  **Ví dụ:** Cho đồ thị hàm số  như hình vẽ. Giá trị m để phương trình  có hai nghiệm phân biệt là:  **A.** .  **B.** .  **C.** .  **D.**.  **II. Mức độ vận dụng :**  - Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết điều kiện về hệ số góc hoặc đi qua một điểm.  -Vận dụng kiến thức về sự tương giao của hai đồ thị và kiến thức về phương trình tìm điều kiện của tham sao giao điểm của hai đồ thị thỏa mãn điều kiện cho trước.  **Ví dụ 1:**  Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đường thẳng  cắt đồ thị hàm số  tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.  **A**. . **B**. . **C**. . **D**. .  **Ví dụ 2:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đường thẳng  cắt đồ thị hàm số  tại hai điểm phân biệt  và  sao cho độ dài  ngắn nhất.  **A**. . **B**. . **C**. . **D**. . |
| **Ứng dụng thực tế** | Giải quyết một số bài toán ứng dụng thực tế liên qua tới nhiều kiến thức tổng hợp như đạo hàm, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhât, diện tích, thể tích,..  **Ví dụ ở mức độ vận dụng thấp:**  Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  là  (kết quả khảo sát được trong tháng 8 vừa qua). Nếu xem  là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ:  **A**. 12. **B.** 30. **C**. 20. **D**. .  **Ví dụ ở mức độ vận dụng cao:**  Một bác thợ gò hàn muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thể tích . Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh , chiều cao . Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm  để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất.  *x*  h  h  h  h  *x*  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**ĐỀ LUYỆN TẬP TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ**

*Các câu hỏi sau chỉ có 1 phương án trả lời đúng. Hãy khoanh tròn vào phương án trả lời đúng đó.*

**Câu 1:** Cho hàm số  có và. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.  
 **B.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.  
 **C.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng *x* = 1 và *x* = -1.  
 **D.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng *y* = 1 và *y* = -1.

**Câu 2:** Tìm đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 3:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình  có 2 nghiệm.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

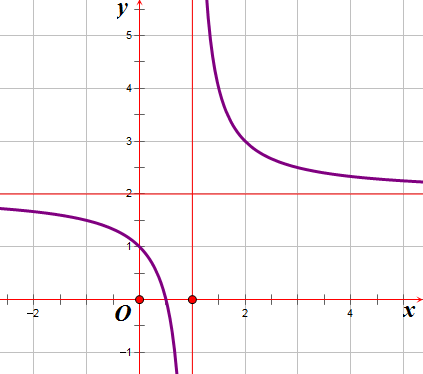
**Câu 4:** Tìm các khoảng đồng biến của hàm số .

**A.**  **B.**  **C.**  và  **D.** 

**Câu 5:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đồ thị hàm số  có các điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 6:** Xác định hàm số có đồ thị sau



**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

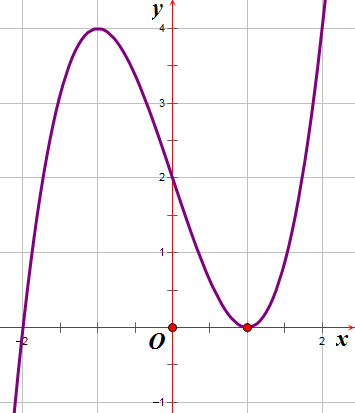
**Câu 7:** Tìm điểm cực đại của hàm số .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để hàm số  nghịch biến trên khoảng 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 9:** Xác định hàm số có đồ thị sau



**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 10:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên đoạn .

**A.** -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 

**Câu 11:** Cho đồ thị (C) có phương trình . Tịnh tiến đồ thị (C) theo vectơ  ta được đồ thị (C’). Tìm phương trình của đồ thị (C’).

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 12:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đường thẳng (d):  cắt đồ thị (C):  tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn AB ngắn nhất.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 13:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để một tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số  (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 10.

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 14:** Một công ty sữa cần làm hộp sữa hình trụ, có thể tích 0,2 (lít). Tính bán kính đáy hộp để công ty tốn ít nguyên liệu làm hộp nhất.

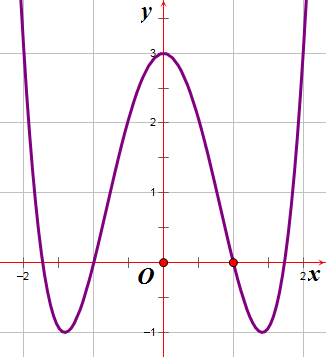
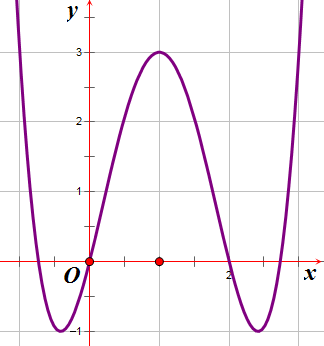
**A.**  (cm). **B.**  (dm). **C.**  (dm). **D.**  (cm).

**Câu 15:** Tìm hàm số không có cực trị trong các hàm số cho dưới đây.

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 16:** Cho hàm số  có đồ thị (H1) như hình vẽ. Tìm hàm số có đồ thị (H2) trong các hàm số cho dưới đây.

(H1) (H2)

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 17:** Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất  và giá trị lớn nhất  của 

**A.**  và  **B.** và 

**C.**  và  **D.**  và 

**Câu 18:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  thì hàm số  đồng biến trên khoảng 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 19:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho  (O là gốc tọa độ).

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 20:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để hàm số  đạt cực tiểu tại điểm 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 21:** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số .

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

**Câu 22:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đường thẳng (d) :  cắt đồ thị hàm số  (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

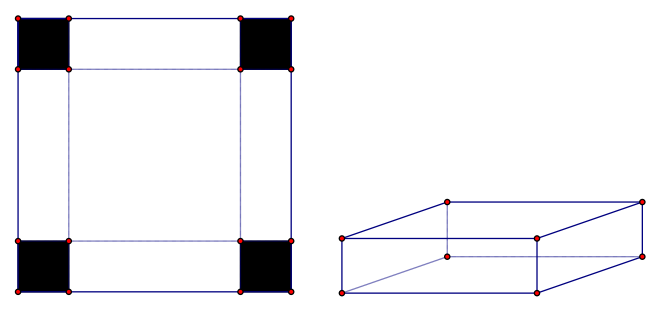
**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 23:** Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số .

**A.**  và  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Câu 24:** Từ một tấm tôn hình vuông cạnh 15(cm) người ta cắt ở mỗi góc tấm tôn một hình vuông nhỏ rồi gò thành một cái hộp (hình hộp chữ nhật) không có nắp như hình vẽ dưới đây. Tìm thể tích lớn nhất của hộp.



**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Câu 25:** Tìm giá trị lớn nhất  của hàm số  trên đoạn .

**A.**  **B.** . **C.** . **D.** .

------------- HẾT ----------

**ĐÁP ÁN**

-----

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1** | D | **Câu 6** | A | **Câu 11** | A | **Câu 16** | A | **Câu 21** | D |
| **Câu 2** | C | **Câu 7** | B | **Câu 12** | B | **Câu 17** | D | **Câu 22** | D |
| **Câu 3** | D | **Câu 8** | A | **Câu 13** | B | **Câu 18** | B | **Câu 23** | A |
| **Câu 4** | C | **Câu 9** | C | **Câu 14** | D | **Câu 19** | B | **Câu 24** | C |
| **Câu 5** | C | **Câu 10** | A | **Câu 15** | C | **Câu 20** | B | **Câu 25** | D |

**Tên các trường thực hiện Chuyên đề Hàm số:**

1. **Trường THPT Chuyên Tuyên Quang**
2. **Trường THPT Yên Hoa**
3. **Trường THPT Hòa Phú**