**ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 9-PHÂN SỐ**

**CHỦ ĐỀ 2:PHÂN SỐ TỐI GIẢN**

**PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

-Phân số tối giản hay còn gọi là phân số không thể rút gọn được nữa là phân số mà tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và -1.

-Giả sử ta có phân số . Phân số  được gọi là phân số tối giản khi và chỉ khi .

- Nếu phân số  là phân số tối giản thì phân số  cũng là phân số tối giản.

- Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

-Tính chất:

+

+

-Thuật toán Ơclit tìm ƯCLN(a;b):

Ta tìm UCLN(a ;b) bằng cách dùng thuật toán Euclide như sau :

a = bq0 + r1 với 0 < r1 < 

b = r1 q1 + r2 với 0< r2 < r1

....

rn-1 = rnqn  .

Thuật toán phải kết thúc với một số dư bằng 0

Do đó ta có: (a; b) = (b; r1) = (r1; r2) =...=(rn-1; rn) = rn.

**PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1:**Chứng minh phân số với tham số  là phân số tối giản.

***I.Phương pháp giải***

Chứng minh phân số  là phân số tối giản, ta cần chứng minh , hoặc dùng thuật toán Euclide hoặc tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 thì các phân số sau là phân số tối giản.

a. b. c. 

**Lời giải**

a. 

Vì nên  là phân số tối giản.

b.

\*Cách 1: Theo thuật toán Euclide: 

do đó  là phân số tối giản.

\*Cách 2: Giả sử 







Vậy  là phân số tối giản.

\*Cách 3: Ta có: mà  là phân số tối giản nên phân số  là phân số tối giản.

**Bài 2:** Chứng minh rằng với n Z các phân số sau tối giản.

a.  b.  c.  d. 

e.  f.  g.  h. 

**Lời giải**

a. 

Giả sử 









Vậy phân số là phân số tối giản.

b. 

Vì nên  là phân số tối giản.

c. 

Giả sử 









Vậy phân số là phân số tối giản.

d. 

Giả sử 









Vậy phân số là phân số tối giản.

e. 

Giả sử 









Vậy phân số là phân số tối giản.

f. 

Giả sử 









Vậy phân số là phân số tối giản.

g. 

Giả sử 









Vậy phân số là phân số tối giản.

h. 

Giả sử 









Vì là số lẻ, là số chẵn nên suy ra 

Vậy phân số là phân số tối giản.

**Bài 3:** Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

a. b.  c.  d.  e. 

**Lời giải**

a.

Ta có: Theo thuật toán Euclide: .

Do đó: phân số  là phân số tối giản.

b. 

Vì phân số là phân số tối giản nên phân số là phân số tối giản.

c. 

Ta có: Theo thuật toán Euclide: .

Do đó: phân số  là phân số tối giản.

Vì phân số  là phân số tối giản nên phân số là phân số tối giản.

d. 

Ta có: Theo thuật toán Euclide: .

Do đó: phân số  là phân số tối giản.

Vì phân số  là phân số tối giản nên phân số là phân số tối giản.

e. 

Ta có: Theo thuật toán Euclide: .

Do đó: phân số  là phân số tối giản.

**Bài 4:** Cho a là số tự nhiên chia 4 dư 3. Phân số  có là phân số tối giản không?

**Lời giải**

Giả sử 









Vì a là số tự nhiên chia 4 dư 3 nên a là số lẻ.

Suy ra: 

Vậy phân số là phân số tối giản.

**Bài 5:** Chứng minh rằng nếu a là số nguyên khác -1 thì giá trị của biểu thức  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Ta có: 

Gọi 







Mà  là số lẻ nên d lẻ

Vậy với a khác -1 thì giá trị của A là phân số tối giản.

**Bài 6:** Chứng minh với mọi số nguyên n khác không thì phân số  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Giả sử 





Mà nên





Vậy phân số là phân số tối giản.

**Dạng 2:**Tìm tham số để phân số tối giản.

***I.Phương pháp giải***

- Bước 1: Giả sử d là ước chung của tử và mẫuTử và mẫu cùng chia hết cho d.

-Bước 2: Vận dụng các tính chất quan hệ chia hết để tìm các giá trị của d.

- Bước 3: Xác định giá trị khác -1 và 1 của d tử hoặc mẫu không chia hết cho các giá trị đótừ đó tìm các điều kiện của ẩn.

Hoặc biến đổi phân số thành tổng hoặc hiệu của số nguyên với phân số tối giản.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. b.  c. 

**Lời giải**

a.

Giả sử 









Để phân số  là phân số tối giản thì 

Hay  không chia hết cho 5.

Ta có: 





Vậy: với thì phân số  là phân số tối giản.

b. 

Giả sử 









Để phân số  là phân số tối giản thì 

Hay  không chia hết cho 11.

Ta có: 





Vậy: với thì phân số  là phân số tối giản.

c. 

Giả sử 









Để phân số  là phân số tối giản thì 

Hay  không chia hết cho 31.

Ta có: 





Vậy: với thì phân số  là phân số tối giản.

**Bài 2 :** Tìm tất cả các số nguyên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. b.  c. 

**Lời giải**

a.

Ta có:  ( với )

Để  là phân số tối giản thì  là phân số tối giản.

Mà  là phân số tối giản ta phải có 

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu  thì  hay  do đó  nên  khi 

Vậy: phân số là phân số tối giản khi 

b. 

Ta có:  ( với )

Để  là phân số tối giản thì  là phân số tối giản.

Mà  là phân số tối giản ta phải có 

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu  thì  hay  do đó  nên  khi 

Vậy: phân số là phân số tối giản khi 

c. 

Ta có:  ( với )

Để  là phân số tối giản thì  là phân số tối giản.

Mà  là phân số tối giản ta phải có 

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu  thì  hay  do đó  nên  khi 

Vậy: phân số là phân số tối giản khi 

**Bài 3:** Tìm tất cả các số nguyên n để phân số  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Vì 3 là số nguyên tố nên  là phân số tối giản khi  không chia hết cho 3.

Do  nên  khi hay 

**Bài 4:** Tìm các số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. b.  c. 

**Lời giải**

a.

Giả sử 









Để phân số  là phân số tối giản thì 

Hay  không chia hết cho 3.

Ta có: 





Vậy: với thì phân số  là phân số tối giản.

b. 

Giả sử d là ước chung nguyên tố của và 









+ (vô lí)

+



Vậy: với thì phân số  là phân số tối giản.

c. 

Giả sử d là ước chung nguyên tố của và 









+



+

 

Vậy: với thì phân số  là phân số tối giản.

**Bài 5:** Tìm tất cả số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.  
a. b. 

**Lời giải**

a.

Giả sử 









Để phân số  là phân số tối giản thì 

Hay  không chia hết cho 11.

Ta có:  





Vậy: với  thì phân số  là phân số tối giản.

b. 

Giả sử 









Để phân số  là phân số tối giản thì 

Hay  không chia hết cho 7.

Ta có:  





Vậy: với  thì phân số  là phân số tối giản.

**Bài 6:** Tìm tất cả các số nguyên n để phân số tối giản.

**Lời giải**

Giả sử 













Để phân số  là phân số tối giản thì 

Hay  không chia hết cho 11.

Ta có:  





Vậy: với thì phân số  là phân số tối giản.

**Dạng 3:** Tìm tham số để phân số không tối giản.

***I.Phương pháp giải***

Để một phân số không tối giản thì tử số và mẫu số phải có ít nhất một ước chung là một số nguyên tố. ***II.Bài toán***

**Bài 1:** Tìm tất cả các số nguyên  để  là phân số chưa tối giản.

**Lời giải**

Để  không là phân số tối giản ta phải có 

Vì là số nguyên tố do đó nếu thì 

hay , do đó 

**Bài 2:** Tìm tất cả các số nguyên  để không là phân số tối giản.

**Lời giải**

Ta có  nên  không phải là phân số tối giản khi chia hết cho  hoặc .

Vì không chia hết cho 3 nên phải chia hết cho 7 .

hay (vì )

do đó 

Vậyđể không là phân số tối giản.

**Bài 3:** Tìm tất cả các số tự nhiên đểphân số không là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi là ước nguyên tố chung (nếu có) của và 



 hay 

Vì là ước nguyên tố nên 

Khi đó vô lý

Vậy không có số tự nhiên để phân số không là phân số tối giản.

**Bài 4:** Tìm tất cả các số tự nhiên  để phân số không là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi là ước nguyên tố chung (nếu có) của và 



 hay

Suy ra 

Khi đó  hay 



Vậy với để phân số không là phân số tối giản.

**Bài 5:** Chứng minh rằng:  là phân số chưa tối giản.

**Lời giải**

Ta có 

Vậy  là phân số chưa tối giản.

**Bài 6:** Phân số  rút gọn cho những số nguyên dương nào?

**Lời giải**

Gọi là ước chung (nếu có) của và 





Suy ra 

Vậy phân số  hoặc tối giản hoặc chỉ rút gọn được cho .

**Dạng 4:**Chứng minh phân số tối giản với điều kiện cho trước

***I.Phương pháp giải***

- Dùng phương pháp phản chứng.

- Dùng định nghĩa phân số tối giản.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Cho phân số  tối giản.Chứng minh rằng phân số tối giản.

**Lời giải**

*Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.*

Giả sử  không tối giản tức là tử và mẫu  có một ước chung .

suy ra 

như vậy  và  có một ước chung .

Điều này trái với đề bài đã có  tối giản

Vậy là phân số tối giản.

**Bài 2:** Cho phân số là phân số chưa tối giản.Chứng minh rằng phân số cũng chưa tối giản.

**Lời giải**

Vì phân số là phân số chưa tối giản nên 



 mà 

Do đó phân số cũng chưa tối giản.

**Bài 3:** Cho phân số tối giản  xét xem phân số  có là phân số tối giản không?

**Lời giải**

Gọithì





 hoặc .

+ Nếu ta có



 mà nên

Mặt khác do tối giản nên 

+ Nếu  thì hoặc 

Từ (1) và (2) suy ra hoặc tối giản hoặc rút gọn được cho .

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  nhỏ nhất khác  để các phân số  đều tối giản.

**Lời giải**

Xét phân số , có 

Nên phân số tối giản khi 

Xét phân số , có 

Nên phân số  tối giản khi 

Vậy các phân số cùng tối giản khi 

Mặt khác, là số tự nhiên nhỏ nhất khác nên ta chọn .

Vậy thì các phân số  đều tối giản.

**Bài 5:** Tìm các số nguyên sao cho các phân số  đều là phân số tối giản.

**Lời giải**

Ta có  nên để các phân số  đều là phân số tối giản thì 

Vì  nên ta chọn .

Vậy thì các phân số  đều là phân số tối giản.

**Bài 6:** Tìm số tự nhiên  nhỏ nhất để các phân số  đều tối giản.

**Lời giải**

Ta có 



.........................



Các phân số trên có dạng 

Để các phân số trên tối giản thì  và  là hai số nguyên tố cùng nhau( vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số suy ra phân số rút gọn được cho )

Ta cần tìm số tự nhiên  sao cho  nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số 

Như vậy phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn đó là số 



Vậy với thì các phân số  đều tối giản.

**Bài 7:** Tìm số tự nhiên  nhỏ nhất để các phân số  đều tối giản.

**Lời giải**

Ta có 



.........................



Các phân số trên có dạng 

Để các phân số trên tối giản thì  và  là hai số nguyên tố cùng nhau( vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số suy ra phân số rút gọn được cho )

Ta cần tìm số tự nhiên  sao cho  nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số 

Như vậy phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn đó là số 



Vậy với thì các phân số  đều tối giản.

**Bài 8:** Tìm để phân số  tối giản.

**Lời giải**

Ta có phân số  tối giản nên 

Mà  nên 

Do đó 

Đặt 

Vậy 

**Bài 9:** Chứng minh rằng , với thìlà các phân số tối giản.

**Lời giải**

Vì với mọi  thì   lẻ lẻ và  không chia hết cho 

Vậy  là các phân số tối giản.

**Bài 10:** Chứng tỏ rằng nếu là phân số tối giản thì:

a) Phân số cũng là phân số tối giản, suy ra  là tối giản.

b) Phân số hoặc  cũng là phân số tối giản.

**Lời giải**

a) Vì phân số là phân số tối giản nên 

mà 

Do đó phân số là phân số tối giản.

Suy ra 

Mà  là phân số tối giản

Vậy  là phân số tối giản.

b) Ta có phân số là phân số tối giản nên 

mà 

nên phân số hoặc  là phân số tối giản.

**Bài 11:** CMR nếu thì  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi 



Và 

Từ và

Mà 

Vậy nếu thì  là phân số tối giản.

**Dạng 5:**Tìm phân số tối giản thỏa mãn điều kiện cho trước

***I.Phương pháp giải***

Dùng định nghĩa hai phân số bằng nhau.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Tìm phân số tối giản  ( mà giá trị của nó không đổi khi cộng thêm tử với , mẫu với .

**Lời giải**

Với  ta có:

Khi cộng thêm tử với , mẫu với  vào phân số  ta được phân số 

Lúc này ta có:  = 

Từ tính chất hai phân số bằng nhau đã học ta có 

Suy ra  nên .

Vậy phân số cần tìm là .

**Bài 2:** Tìm phân số tối giản biết rằng khi cộng mẫu vào tử và cộng mẫu vào mẫu thì giá trị của phân số đó tăng lên gấp 2 lần.

**Lời giải**

Gọi phân số cần tìm là , theo đề bài ta có: hay 

suy ra hay 

suy ra  hay  (vì )

Vậy phân số cần tìm là .

**Bài 3:** Tìm phân số dương tối giản nhỏ nhất sao cho khi nhân phân số này với các phân số  thì kết quả là các số nguyên dương.

**Lời giải**

Ta có 

Mà nên là bội của  và  là ước của 

Lại có 

Mà nên  là bội của và là ước của 

Từ và suy ra 

Vậy phân số cần tìm là .

**Bài 4:** Tìm phân số tối giản biết rằng lấy tử cộng với , lấy mẫu cộng với  thì được một phân số bằng .

**Lời giải**

Ta có 

Suy ra 





.

Vậy phân số cần tìm là .

**Bài 5:** Tìm phân số tối giản  biết rằng lấy tử cộng với , lấy mẫu cộng với  thì giá trị của phân số không đổi.

**Lời giải**

Ta có 

Suy ra 





.

Vậy phân số cần tìm là .

**Bài 6:** Tìm một phân số tối giản biết rằng khi cộng mẫu vào tử để có tử mới và lấy mẫu trừ tử để có mẫu mới thì được một số chính phương chẵn bé nhất.

**Lời giải**

Gọi phân số cần tìm là , theo đề bài ta có: 

suy ra hay 

suy ra 

Vậy phân số cần tìm là .

**Bài 7:** Tìm phân số tối giản có mẫu là , biết rằng khi cộng tử với , nhân mẫu với thì được một phân số bằng phân số ban đầu.

**Lời giải**

Gọi phân số cần tìm là . Theo đề bài ta có:









Vậy phân số cần tìm là .

**Bài 8:** Tìm một phân số khi chưa tối giản có tổng của tử và mẫu là , sau khi rút gọn được . Tìm phân số ban đầu.

**Lời giải**

Phân số ban đầu cần tìm và 

Hay 

Vậy phân số ban đầu là .

**Bài 9:** a) Với  là một số nguyên tố nào thì phân số  là phân số tối giản.

b) Với  là một số nguyên tố nào thì phân số  là phân số tối giản.

**Lời giải**

a) Ta có là phân số tối giản khi  là số nguyên tố khác và .

b) Ta có là phân số tối giản khi  là số nguyên tố khác và .

**Bài 10:** Tìm  để .

**Lời giải**

Gọi suy ra 

Hay 

Do đó hay 

Ta có 

tối giản và 

Vì dạng tối giản của phân số là duy nhất nên











 (vì )



Vậy với  thì 

**PHẦN III.BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.**

**Bài 1: (HUYỆN HOA LƯ NĂM 2020-2021)**

Cho . Chứng tỏ  là phân số tối giản.

**Lời giải**

ĐK: 

Gọi 











Vậy  là phân số tối giản

**Bài 2: (HUYỆN PHÙ CÁT NĂM 2020-2021)**

Tìm  để phân số là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi 









Để là phân số tối giản thì 







Vậy thì phân số là phân số tối giản

**Bài 3: (HUYỆN THANH BA NĂM 2020-2021)**

Chứng minh phân số sau là phân số tối giản với mọi số tự nhiên : .

**Lời giải**

Gọi 









Vậy phân số là phân số tối giản với mọi số tự nhiên .

**Bài 4: (HUYỆN CHƯƠNG MỸ NĂM 2020-2021)**

Cho phân số 

a) Chứng tỏ rằng phân số P tối giản.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của biểu thức P.

**Lời giải**

Cho phân số 

a) Gọi 

và 





Suy ra phân số tối giản.

b) Ta có: 





Để  đạt giá trị lớn nhất thì  đạt giá trị âm nhỏ nhất, mà nên đạt giá trị nguyên âm lớn nhất khi .

Khi đó giá trị lớn nhất của là: .

Để  đạt giá trị nhỏ nhất thì  đạt giá trị dương lớn nhất; mà nên đạt giá trị nguyên dương nhỏ nhất khi .

Khi đó giá trị nhỏ nhất của  là: .

Vậy giá trị lớp nhất của  bằng , đạt tại 

Giá trị nhỏ nhất của  bằng , đạt tại .

**Bài 5: (HSG SƠN TỊNH NĂM 2020-2021)**

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên , phân số  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi 









Vậy phân số  là phân số tối giản.

**Bài 6: (HUYỆN NHO QUAN NĂM 2020-2021)**

Chứng tỏ rằng với là số nguyên dương thì  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi 









Vậy: phân số phân số  là phân số tối giản với 

**Bài 7: (HUYỆN TRIỆU SƠN NĂM 2020-2021)**

Tìm các số tự nhiên  để phân số  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi 

  







Để phân số là phân số tối giản thì 

Hay  không chia hết cho 7











Vậy: với phân số  là phân số tối giản.

**Bài 8: (THỊ XÃ THÁI HÒA NĂM 2020-2021)**

Chứng minh rằng phân số  là phân số tối giản với mọi số tự nhiên .

**Lời giải**

Gọi 









Vậy phân số phân số  là phân số tối giản với 

**Bài 9: (HUYỆN ANH SƠN NĂM 2020-2021)**

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  thì  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi 

 







Vậy phân số phân số  là phân số tối giản với 

**Bài 10: (HUYỆN PHÚ LƯƠNG NĂM 2020-2021)**

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:



**Lời giải**

Ta có các phân số đã cho đều có dạng  với 

Do đó để các phân số đều tối giản thì  và  phải nguyên tố cùng nhau.

Suy ra phải nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số 

 là số nguyên tố nhỏ nhất và lớn hơn 100





🙢**HẾT**🙠