**ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 9 – PHÂN SỐ**

**CHỦ ĐỀ 1: HỆ THỐNG KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Số có dạng , trong đó  gọi là phân số.

Số nguyên  được đồng nhất với phân số .

Tính chất cơ bản của phân số:  với  và ƯC.

Nếu  thì  là phân số tối giản. Nếu  là dạng tối giản của phân số  thì tồn tại số nguyên  sao cho .

**PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1: Áp dụng các tính chất chia hết để giải các bài toán về phân số**

***I.Phương pháp giải***

**Bài toán tổng quát:** Tìm số tự nhiên  sao cho  có giá trị nguyên.

*Cách làm:*

Ư*.*

*Nếu*  *ta tìm được*  *và kết luận.*

*Nếu*  *ta tìm được*  *cần thử lại rồi kết luận.*

**Bài toán tổng quát:** *Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên*  *để phân số tối giản hoặc rút gọn được” ta làm như sau:*

*Gọi*  *là ước nguyên tố của tử và mẫu.*

*Dùng các phép toán cộng, trừ, nhân để khử*  *để từ đó tìm* *.*

*Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên*  *để phân số tối giản” ta tìm*  *để tử số hoặc mẫu số không chia hết cho các ước nguyên tố.*

*Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên*  *để phân số rút gọn được” ta tìm*  *để tử số hoặc mẫu số chia hết cho các ước nguyên tố.*

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Cho 

a) Tìm  nguyên để  là một phân số

b) Tìm  nguyên để  là một số nguyên.

***Lời giải:***

Điều kiện: 

1. Để  là phân số thì  
2. Để phân số  có giá trị là một số nguyên thì



Mà  nên Ư.

Ư

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Vậy .

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  để phân số  có giá trị là một số nguyên.

***Lời giải:***

Điều kiện: 

Để phân số  có giá trị là một số nguyên thì

.

 Ư.

Ư.

Mặt khác,  là số tự nhiên nên .

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | ( loại ) | ( loại) |  |  | ( loại) |  |

Vậy .

**Bình luận:**

- *Ngoài cách lập bảng trên ta có thể để ý rằng:*

*.*

*Kết hợp với* *.*

- *Đối với bài toán trên với*  *đều là số nguyên nhưng khi thay vào*  *thì không được giá trị nguyên vì: theo bài ra thì* *nhưng không có điều ngược lại.*

**Bài 3:** Chứng minh rằng phân số  tối giản với mọi số tự nhiên .

***Phân tích:***

*Để chứng minh một phân số là phân tối giản thì ta cần chứng minh ước chung lớn nhất của tử và mẫu phải bằng 1.*

***Lời giải:***

Điều kiện: 

Giả sử ƯCLN  

Vì  là số tự nhiên lẻ nên.

Vậy  nên phân số  là phân số tối giản với mọi số tự nhiên .

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  để phân số  rút gọn được.

***Lời giải:***

Điều kiện: 

Gọi  là ước nguyên tố của  và .

 .

Nếu  ta thấy  còn  khi  lẻ.

Nếu  thì  hay  .

Với  thì  .

Vậy  lẻ hoặc  thì phân số  rút gọn được.

**Bài 5:** Tìm các số tự nhiên  nhỏ nhất sao cho: .

***Lời giải:***

Điều kiện:  ,

Ta có:

.

Suy ra  mà   mặt khác  nhỏ nhất nên .



**Bài 6:** Tìm số tự nhiên  để phân số  có giá trị nguyên.

***Lời giải:***

Điều kiện: 

**Cách 1**:

Để phân số  có giá trị nguyên thì

 

Suy ra  là ước của .

Ư mặt khác  là số tự nhiên nên  nên 

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  | Loại | Loại |  |  |

Vậy  thì phân số  có giá trị nguyên.

**Cách 2:**

Để phân số  có giá trị nguyên thì

.

Suy ra  là ước của 

Ưmặt khác  là số tự nhiên nên  nên 

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  | ( loại) | ( loại) |  |  |

Vậy  thì phân số  có giá trị nguyên.

**Cách 3:**

Để phân số  có giá trị nguyên thì

 

.

Vậy  thì phân số  có giá trị nguyên.

**Bài 7:** Tìm số nguyên  sao cho:

a)  là số nguyên. b)  là số tự nhiên.

***Lời giải:***

1. Điều kiện: 

Để phân số  có giá trị là một số nguyên thì

.

 Ư.

Ư.

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | (loại vì ) |  |  | (loại vì ) |  | (loại vì ) | (loại vì ) |  |
|  |  |  |  |  |  | (loại) |  | 0 |

Vậy thì  có giá trị nguyên.

1. Điều kiện: 

Để phân số  là số tự nhiên thì

 hay .



Mà  nên  Ư.

Ư.

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | (loại vì ) |  |  | (loại vì ) |
|  |  | (loại) |  | 0 |

Vậy  thì  là số tự nhiên.

**Bài 8:** Tìm số tự nhiên  để phân số .

a) Có giá trị là số tự nhiên.

b) Là phân số tối giản.

c) Phân số  rút gọn được với .

***Lời giải:***

Điều kiện: 

1. Để phân số  là số tự nhiên thì

 hay 

Mà  Ư

Ư.

Mà  là số tự nhiên nên  hay  suy ra 

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  | (loại vì ) |  |
|  |  |  |  |

Vậy  thì  là số tự nhiên.

1. Gọi  là ước nguyên tố của  và  thì:



 với  và  là số nguyên tố.

Với  ta có  

Do đó  hay 

Với  ta có 

Do đó  hay ****

Vậy với  và  thì phân số  tối giản.

1. Từ câu b) ta có:

Để phân số  rút gọn được thì  và 

Vì  nên:

TH1:  

Với  thì 

Với  thì 

TH2:  

Với  thì 

Vậy  thì phân số  rút gọn được.

**Bài 9:** Tìm tất cả các số tự nhiên  để phân số  có thể rút gọn được.

***Lời giải:***

Điều kiện: 

Gọi  là ước nguyên tố của  và  thì:



với  và  là số nguyên tố.

Với  mà nên để phân số  có thể rút gọn được thì 

Mà (vì  và ) 

Với  thì  nên để phân số  rút gọn được thì



Vậy với  thì phân số  rút gọn được.

**Bài 10:** Tìm số nguyên  để phân số  có giá trị là một số nguyên.

***Lời giải***

Điều kiện: 

Để phân số  là số nguyên thì

 hay 

Mà  Ư

Ư.

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Vậy  thì  là số nguyên.

**Bài 11:** Cho biểu thức : Tìm giá trị của  để:

a)  là một phân số.

b)  là một số nguyên.

***Lời giải:***

Ta có: 

1. Để  là phân số thì  
2. Để  là số nguyên thì

 hay  hay 

Mà Ư

Ư.

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Vậy  thì  là số nguyên.

**Bài 12:** Với giá trị nào của số tự nhiên  thì :

a) có giá trị nguyên

b)  có giá trị lớn nhất.

***Lời giải:***

Điều kiện: 

1. Để  là số nguyên thì

 hay  hay 

Mà Ư

Ư.

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  | (loại vì ) |  | (loại vì ) |
|  |  |  |  |  |

Vậy  thì  là số nguyên.

1. Ta có: 

Để  có giá trị lớn nhất thì  có giá trị nhỏ nhất

Mà  nên .

Vậy  thì  có giá trị lớn nhất.

**Bài 13:** Tìm  biết  và .

***Lời giải:***

Ta có: 



Theo đề:



Suy ra 

Vậy 

**Bài 14:** Tìm các số nguyên  sao cho 

***Lời giải:*** Ta có:



Do đó: 

Do  là các số nguyên nên  là ước của 18, mặt khác  là số lẻ. Ước lẻ của 18 là:  Ta có:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Vậy có sáu cặp số  ở bảng trên thỏa mãn bài toán.

**Bài 15:** Tìm các số tự nhiên  sao cho: 

***Lời giải:***

Ta luôn có:

 (xảy ra dấu bằng với )

 (xảy ra dấu bằng với )

Do đó: 

Xảy ra  chỉ trong trường hợp 

## **Dạng 2: Tìm phân số biết mối liên hệ giữa tử và mẫu**

***Một số điều kiện cho trước thường gặp:***

➀ *Biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.*

➁ *Viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu).*

➂ *Liên hệ về phép chia giữa phân số cần tìm với phân số đã cho.*

➃ *Biết phân số bằng phân số nào đó và biết quan hệ ƯCLN(Tử , Mẫu) hoặc tổng (hiệu) của tử và mẫu.*

➄ *Cộng một số vào tử hoặc mẫu được một phân số mới....*

***Phương pháp giải:***

* *Nếu bài toán cho tử số (mẫu số), biến đổi sao cho ba phân số đồng tử (đồng mẫu) rồi so sánh các phân số ta tìm được mẫu số(tử số) còn thiếu.*
* *Ở dạng toán viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu) ta phải tìm được bộ số thuộc các ước của mẫu sao cho tổng của chúng bằng tử. Khi đó ta tìm được bộ phân số có tổng bằng phân số ban đầu, các phân số này có tử số là ước của mẫu nên khi viết dưới dạng tối giản đều có tử số bằng 1.*
* *Từ các dữ kiện bài toán ta vận dụng linh hoạt các tính chất của phân số tối giản với tính chia hết để giải toán.*
* *Dạng toán: Tìm phân số bằng phân số* *, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là* , ta t*ìm phân số tối giản của*  *sau đó nhân cả tử và mẫu phân số tối giản với*  *ta được số cần tìm.*

**Bài 1:** Tìm phân số có tử là , biết rằng phân số đó lớn hơn  và nhỏ hơn .

***Phân tích:***

*Do phân số có tử số bằng 5 nên ta có thể gọi dạng phân số cần tìm là* *, sau đó ta biến đổi cả ba phân số trên có cùng tử số. Khi so sánh hai phân số cùng tử, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì nhỏ hơn. Khi đó ta tìm được khoảng giá trị của*  *và chọn được giá trị*  *phù hợp.*

***Lời giải:***

Gọi mẫu phân số cần tìm là 

Ta có: .

Vậy phân số cần tìm là .

**Bình luận:** *Bài toán thuộc dạng biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.*

**Bài 2:** Tìm phân số có mẫu là , biết rằng phân số đó lớn hơn  và nhỏ hơn .

***Lời giải:***

Gọi tử phân số cần tìm là 

Ta có: .

Vậy các phân số cần tìm là: 

**Bài 3:** Hãy viết phân số  dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng  và có mẫu số khác nhau.

**Phân tích:** *Nhận thấy nếu mẫu số bằng* *,* Ư *ta không tìm được bộ ba số nào có tổng bằng* 11*. Lặp lại cách thử này đối với mẫu và tử của phân số khi nhân cả tử và mẫu của phân số với cùng một số cho đến khi tìm được bộ số thỏa mãn. Dễ thấy khi nhân cả tử và mẫu phân số với*  *ta được phân số* *,* Ư*khi đó ta tìm được bộ ba số cộng với nhau bằng*  *là* *.*

***Lời giải:***

 Ư

.

**Bài 4:** Hãy viết phân số  dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng  và có mẫu số khác nhau*.*

***Lời giải:***

 Ư

.

**Bài 5:** Tìm phân số tối giản  nhỏ nhất (với ) biết khi chia  cho và  được thương là các số nguyên.

***Phân tích:***

# Do tính chất chia hết ta có: chia hết cho nên là số nguyên, vậy chia hết cho , chia hết cho . Tương tự, chia hết cho nên là số nguyên, vậy chia hết cho , chia hết cho . Do tính chất của phân số tối giản và lớn hơn nên ta có và ƯCLN

***Lời giải:***

Vì  tối giản nên ƯCLN và  là các số nguyên nên  chia hết cho  và  còn  và  chia hết cho .

Do đó  và ƯC

Vì  là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn  nên  *và* ƯCLNnên  Do đó phân số cần tìm là .

**Bài 6:** Tìm phân số tối giản  nhỏ nhất (với ) biết khi chia  cho  và  được thương là các số nguyên.

***Lời giải:***

Vì  tối giản nên ƯCLN và  là các số nguyên nên  chia hết cho  và  còn  và  chia hết cho .

Do đó  và ƯC

Vì  là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn  nên  *và* ƯCLNnên Do đó phân số cần tìm là .

**Bài 7:** Tìm phân số bằng phân số , biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 

***Lời giải:***

Ta thấy ƯCLN. Suy ra phân số  là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành  bằng cách chia cả tử và mẫu cho  Vậy phân số cần tìm là .

**Bài 8:** Tìm phân số bằng phân số , biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 

***Lời giải:***

Ta thấy ƯCLN Suy ra  và  là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành  bằng cách chia cả tử và mẫu cho  Vậy phân số cần tìm là 

**Bài 9:** Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, lớn gấp  lần phân số ban đầu ?

***Lời giải:***

Gọi phân số tối giản lúc đầu là . Nếu chỉ cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số ta được phân số .

Để  gấp  lần phân số lúc đầu thì  phải bằng  lần 

⇒ Mẫu số  phải gấp  lần tử số .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là .

**Bình luận:** *Từ giả thiết bài toán ta tìm được mối liên hệ giữa tử và mẫu. Từ đó tìm được phân ban đầu.*

**Bài 10:** Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng tử số vào tử số và cộng tử số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, giảm  lần phân số ban đầu ?

***Lời giải:***

Gọi phân số tối giản lúc đầu là . Nếu chỉ cộng tử số vào tử số và cộng tử số vào mẫu số ta được phân số .

Để  giảm  lần phân số ban đầu thì  phải bằng  lần 

⇒ Tử số  phải gấp  lần mẫu số .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là .

**Bài 11:** Tìm các số tự nhiên  và  biết rằng: ƯCLN

***Lời giải:***

Ta có:

  (1)

ƯCLN  (2)

Từ (1) và (2) suy ra   (Vì )



**Bài 12:** Tìm các số tự nhiên  và  biết rằng:

a) .

b) ƯCLN.

***Lời giải:***

a) Ta có:

 nên  (1)

Lại có: ƯCLN ƯCLN và  (2)

Theo đề bài thì:  (3)

Từ (1), (2) và (3)



Khi đó 

Vậy 

b) Ta có:

 nên (1)

Lại có: ƯCLN ƯCLN (2)

Theo đề bài thì: ƯCLN (3)

Từ (1), (2) và (3) 

Khi đó 

Vậy 

**Bài 13:** Cho ba phân số . Biến đổi ba phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai, mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba.

***Lời giải:***

Vì mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai nên ta có: 

Vì mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba nên ta có: 

Vậy ba phân số cần tìm là: 

### Bài 14: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là . Cộng thêm vào tử số của phân số đó đơn vị thì ta được phân số mới bằng phân số Tìm phân số ban đầu.

***Lời giải:***

Tổng của tử số và mẫu số là: 

Nếu cộng thêm vào tử số đơn vị thì ta được tổng mới là: 

Ta có sơ đồ:

Tử số: |---|---|---|

Mẫu số: |---|---|

Tử số mới là: 

Tử số ban đầu là: 

Mẫu số ban đầu là: 

Vậy phân số ban đầu là: 

**Bài 15:** Cho hai số và  thỏa mãn: . Chứng minh  Tính . Tìm .

***Lời giải:***

Ta có: 

Thay  vào  ta được:



Suy ra 

Vậy 

**Bài 16:** Tìm các số tự nhiên  thỏa mãn điều kiện:  và 

***Lời giải:***

Theo đề bài ta có: 

Vì  nên 

Khi đó:



Lại có: 



Vì  nên 

Với  thì 

Với  thì 

Vậy  hoặc 

🙢 **HẾT** 🙠