**ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 6 - SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG GIẢI BÀI TOÁN SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. ĐỊNH NGHĨA**

Số chính phương là số tự nhiên viết được dưới dạng bình phương đúng của một số nguyên.

Ví dụ: ; .

**2. SỐ CHÍNH PHƯƠNG CHẴN, SỐ CHÍNH PHƯƠNG LẺ**

Một số chính phương được gọi là số chính phương chẵn nếu nó là bình phương của một số chẵn, là số chính phương lẻ nếu nó là bình phương của một số lẻ. (Nói một cách khác, bình phương của một số chẵn là một số chẵn, bình phương của một số lẻ là một số lẻ).

**3. CÁC TÍNH CHẤT CHUNG CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

1. Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 không thể có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.

Như vậy để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là 2; 3; 7 hoặc 8.

1. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các TSNT với số mũ chẵn, không chứa TSNT với số mũ lẻ.

Ví dụ: 

Để chứng minh một số không phải SCP ta chỉ ra số đó khi phân tích ra TSNT thì tồn tại thừa số nguyên tố chứa số mũ lẻ.

1. Số chính phương chỉ có thể có 1 trong 2 dạng  hoặc , không có SCP nào có dạng  .
2. Số chính phương chỉ có thể có 1 trong 2 dạng  hoặc , không có SCP nào có dạng  hoặc .
3. Số các ước số của một số chính phương là số lẻ, ngược lại một số có số lượng các ước là lẻ thì đó là số chính phương.
4. Nếu số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho .
   * Số chính phương tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn (121, 49, …).
   * Số chính phương tận cùng là 5 thì chữ số hàng chục là 2.
   * Số chính phương tận cùng là 4 thì chữ số hàng chục là chẵn.
   * Số chính phương tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là lẻ.
   * Nếu SCP có chữ số tận cùng là 0 thì SCP đó có một số chẵn chữ số 0 ở tận cùng như : 100, 10000, …
5. Công thức để tính hiệu của hai số chính phương: a2 - b2 = (a+b).(a-b).
6. Tất cả các số chính phương có thể viết thành dãy tổng của các số lẻ tăng dần từ 1, ví dụ: 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 +7, 1 + 3 + 5 +7 + 9, ….

**3. HỆ QUẢ**

* + Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.
  + Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25.
  + Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.
  + Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.
  + Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho  ( là số nguyên tố, ).

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1: Chứng minh một biểu thức không là số chính phương.**

***I. Phương pháp giải:***

* + Đề bài chứng minh một biểu thức  không là số chính phương.
  + Giả sử biểu thức  là số chính phương.
  + Sử dụng các tính chất để tìm ra điều vô lí hay mâu thuẫn.
  + Vậy biểu thức  không là số chính phương.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh rằng với  thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

- Với  không là số chính phương.

- Với  không là số chính phương.

- Với .

Giả sử là số chính phương.

 .

.

.

. 

.

 .

Ta thấy  là điều mâu thuẫn với nhau so với đẳng thức .

Vậy  không là số chính phương với mọi số tự nhiên .

**Bài 2:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

Khi đó đặt  .

 .

 .

Như vậy, trong hai số  và  phải có ít nhất một số chẵn .

Mặt khác  chẵn.

Suy ra hai số  và  cùng tính chẵn lẻ .

Từ  và  suy ra  và  là hai số chẵn.





 mà , so sánh điều này với , ta thấy đây là điều vô lý.

Vậy với mọi số nguyên dương  thì  không là số chính phương.

**Bài 3:** Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

***Lời giải:***

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp lần lượt là , , , và 

Đặt  

Ta đi chứng minh  không là số chính phương.

Giả sử   .

.

.

Đặt  .

.

.

.

.





 .

Ta thấy  mâu thuẫn với 

Vậy  không là số chính phương hay tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

**Bài 4:** Chứng minh rằng với tổng của  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Đặt  .

Giả sử  là số chính phương .

.

.

.

Mà .

Đây là điều vô lý.

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 5:** Chứng minh rằng với  lẻ và  thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Đặt  .

Khi  lẻ: Đặt .

.

Có 49 chia 4 dư 1 chia 4 dư 1;  chia 4 dư 3  chia 4 dư 3 (vô lý).

Vậy với  lẻ và thì  không là số chính phương.

**Bài 6:** Chứng minh rằng nếu số tự nhiên  là số nguyên tố thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương  .

Xét .

Tồn tại một trong hai thừa số ,  chia hết cho số nguyên tố.

Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn .

Thật vậy, do  (vì ).

Nên .

Vậy nếu số tự nhiên  là số nguyên tố thì  không là số chính phương.

**Bài 7:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Với  không là số chính phương.

Với :

Giả sử  là số chính phương.

Mà  là số lẻ nên .

.

Vì nên  .

Mà .

Nên  .

So sánh  và  với , ta thấy mâu thuẫn với nhau.

Vậy với mọi số tự nhiên  thì  không là số chính phương.

**Bài 8:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì không là số chính phương.

***Lời giải:***

Với :

Giả sử  là số chính phương.

.

.

.

 là số chính phương với mọi  (vô lí).

Vậy với mọi số tự nhiên  thì  không là số chính phương.

**Bài 9:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Với n = 0 thì  không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên ,  là số chính phương.

 .

.

 

Mà  chia 3 dư 2

Nên  mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên thì  không là số chính phương.

**Bài 10:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Nếu  thì  không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên ,  là số chính phương.

.

.

Mà nên .

Nên  mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên  thì  không là số chính phương.

**Bài 11:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Nếu  thì  là số chính phương.

Giả sử  là số chính phương.

.

.

.

.

.

.

 là số chính phương.

Đây là điều không xảy ra hay vô lí.

Vì với thì và 

không là số chính phương.

Vậy với mọi số tự nhiên thì  không là số chính phương.

**Bài 12:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

Khi đó:   .

Mà  .

 (vô lí).

Vậy với mọi số tự nhiên thì  không là số chính phương.

**Bài 13:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lẻ thì  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

Khi đó:  .

 .

Vì  là số tự nhiên lẻ nên  cũng là số lẻ   là hai số tự nhiên lẻ liên tiếp và chúng nguyên tố cùng nhau nên

với a, b lẻ và a>b.

 (\*).

Vì  và  nên (\*) vô lí.

Vậy với mọi số tự nhiên thì  không là số chính phương.

**Bài 14:** Chứng minh rằng tổng với  không là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

.

Ta có: .

.

.

.

 hay  (vô lí).

Vậy tổng với  không là số chính phương.

**Bài 15:** Chứng minh rằng tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

***Lời giải:***

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là .

Giả sử tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp trên là số chính phương, tức là là số chính phương.

Đặt .

Ta có:  .

Do đó, vì  là số chẵn và là số chính phương nên .

Mà .

Nên  không xảy ra hay vô lý.

Vậy tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

**Bài 16:** Chứng minh rằng tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

***Lời giải:***

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là .

Giả sử tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp trên là số chính phương, tức là là số chính phương.

Đặt .

Ta có: .

Do đó, vì  là số chính phương nên  có số tận cùng là 0 hoặc 5 có số tận cùng là 3 hoặc 8 (vô lí).

Vậy tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

**Bài 17:** Cho  là số nguyên dương và  là một ước nguyên dương của . Chứng minh rằng  không phải là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là một số chính phương.

Đặt , .

Ta có:  là số chính phương.

 là số chính phương (\*).

Mà  nên (\*) vô lí.

Vậy với  là số nguyên dương và  là một ước nguyên dương của thì  không phải là số chính phương.

**Bài 18:** Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

***Lời giải:***

Gọi ,  là các số tự nhiên lẻ.

Giả sử tổng bình phương của hai số  và  là số chính phương, tức  là số chính phương .

Vì  và đều lẻ nên đặt  , .



Từ và  

Mà 

và mâu thuẫn với nhau.

Vậy tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

**Bài 19:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì  không phải là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

.

.

Mà  nên chia hết cho 2.

Hơn nữa, nên cả hai số đều chia hết cho 2.

.

Nên  là điều mâu thuẫn hay không bao giờ xảy ra hay vô lý.

Vậy với mọi số tự nhiên  thì  không phải là một số chính phương.

**Bài 20:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì  không phải là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

Ta có 



Do  là số lẻ nên  là số lẻ.

 chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 (vô lí).

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 21:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì  không phải là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

Ta có:  

Vì  là số chẵn nên là số chẵn. Mà  là số chính phương nên .

Mặt khác : .

Nên  là điều mâu thuẫn hay không bao giờ xảy ra hay vô lý.

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 22:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  thì  không phải là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

Ta có:





chia 4 dư 1.

 chia cho 4 dư 1.

Do đó,  chia cho 4 dư 2.

Ta có  là số chẵn và  chính phương nên  chia hết cho 22 (vô lí).

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 23:** Chứng minh rằng  không phải là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương.

Ta có 





Ta thấy  có chữ số tận cùng bằng 3 (vô lí).

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 24:** Chứng minh rằng  không phải là số chính phương khi n lẻ.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương với  là số lẻ.

Ta có:

 .

.



 điều này vô lí vì với  là số lẻ.

Vậy  không là số chính phương với  là số lẻ.

**Bài 25:** Chứng minh rằng nếu  là tích của  số nguyên tố đầu tiên thì  và  không thể là các số chính phương.

***Lời giải:***

Vì  là tích của  số nguyên tố đầu tiên nên  và  .

\*Giả sử  là số chính phương.

Đặt  .

Vì p chẵn nên  lẻ, suy ra  lẻ, suy ra  lẻ.

Đặt  .

Ta có .

.

, điều này mâu thuẫn với .

Suy ra  không là số chính phương.

\* Giả sử  là số chính phương.

 là số chia hết cho 3.

Suy ra,  có dạng .

Không có số chính phương nào có dạng , điều này mâu thuẫn với  là số chính phương.

Suy ra  không là số chính phương.

Vậy nếu  là tích của  số nguyên tố đầu tiên thì  và  không thể là các số chính phương.

**Dạng 2: Chứng minh không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.**

***I. Phương pháp giải:***

* + Đề bài yêu cầu chứng minh không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.
  + Giả sử biểu thức A là số chính phương.
  + Sử dụng các tính chất để tìm ra điều vô lí hay mâu thuẫn.
  + Vậy không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.

***II. Bài toán***

**Bài 26:** Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên  nào để  là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương thì .

.

 

Như vậy, trong hai số  và  phải có ít nhất một số chẵn 

Mặt khác m + n + m – n = 2m chẵn.

Suy ra hai số  và  cùng tính chẵn lẻ 

Từ  và  suy ra  và  là hai số chẵn.

Suy ra  nhưng 2006 không chia hết cho 4, so sánh với , ta thấy đây điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để  là số chính phương.

**Bài 27:** Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên  nào để  là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương thì .

.

 

Như vậy, trong hai số  và  phải có ít nhất một số chẵn 

Mặt khác m + n + m – n = 2m.

Suy ra hai số  và  cùng tính chẵn lẻ 

Từ  và  suy ra  và  là hai số chẵn

Suy ra  nhưng 2010 không chia hết cho 4, so sánh với , ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để  là số chính phương.

**Bài 28:** Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên  nào để  là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương thì .

.

 

Như vậy, trong hai số  và  phải có ít nhất một số chẵn 

Mặt khác .

Suy ra hai số  và  cùng tính chẵn lẻ 

Từ  và  suy ra  và  là hai số chẵn.

Suy ra  nhưng 2014 không chia hết cho 4, so sánh với , ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để  là số chính phương.

**Bài 29:** Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên  nào để  là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương thì .

.

 

Như vậy, trong hai số  và  phải có ít nhất một số chẵn 

Mặt khác .

Suy ra hai số  và  cùng tính chẵn lẻ 

Từ  và  suy ra  và  là hai số chẵn.

Suy ra  nhưng 2018 không chia hết cho 4, so sánh với , ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để  là số chính phương.

**Bài 30:** Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên  nào với  chẵn và   để  là số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  là số chính phương thì .

.

 .

Như vậy, vì  chẵn nên trong hai số  và  phải có ít nhất một số chẵn 

Mặt khác, .

Suy ra, hai số  và  cùng tính chẵn lẻ 

Từ  và  suy ra  và  là hai số chẵn.

Suy ra  nhưng  không chia hết cho 4 , so sánh với , ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên  nào với  chẵn và  để  là số chính phương.

**Bài 31:** Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên  nào để  là số chính phương.

***Lời giải:***

Đặt .

Nếu  chẵn (lẻ) thì  cũng chẵn (lẻ) nên cùng  tính chất chẵn (lẻ).

+) Nếu  là các số lẻ thì chia 4 dư 3 (vì  chia 4 dư 1) nên không tồn tại do  chia 4 dư 1.

**+)** Nếu  chẵn thì  chia 4 dư 2 và  là vô lý.

Vậy không tồn tại số tự nhiên  sao cho  là số chính phương.

**Bài 32:** Chứng minh rằng một số chẵn bất kỳ không chia hết cho 4 thì không phân tích thành hiệu của hai số chính phương.

***Lời giải:***

Giả sử  (chẵn chia 4 dư 2 do không chia hết cho 4);  cùng tính chẵn lẻ.

.

Điều này trái với gia thiết ban đầu.

Vậy một số chẵn bất kì không chia hết cho 4 thì không phân tích thành hiệu của hai số chính phương.

🙢 **HẾT** 🙠