**ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 6-SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**CHỦ ĐỀ 2: DÙNG CÁC TÍNH CHẤT CHIA HẾT VÀ SỐ DƯ ĐỂ CHỨNG MINH**

**MỘT SỐ KHÔNG PHẢI LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

1. Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho .
2. Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho 
3. Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho 
4. Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho .

* Tổng quát: Số chính phương chia hết cho  thì chia hết cho  (  là số nguyên tố, )

**\* Phương pháp chứng minh một số không là số nguyên tố bằng quan hệ chia hết:**

Ta có: và  là số nguyên tố mà   không phải là số chính phương.

**\* Để chứng minh****không phải một số chính phương ta có thể:**

* + Chứng minh có tận cùng  hoặc  tận cùng là  chữ số .
  + Chứng minh chứa số nguyên tố với số mũ lẻ.
  + Xét số dư khi chia cho  hoặc  hoặc  hoặc ,... Chẳng hạn chia  dư  hoặc chia  dư ; hoặc chia  dư  thì  không là số chính phương.
  + Chứng minh nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

**PHẦN II. CÁC** **BÀI TẬP**

**Các dạng bài chứng minh một số không phải là số chính phương**

**DẠNG 1:  chia hết cho số nguyên tố  nhưng  không chia hết **

**Bài 1:** Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là  thì số đó không là số chính phương?

**Lời giải**

Số có tổng các chữ số là  thì số đó chia hết cho  nhưng không chia hết cho , do đó số có tỏng các chữ số là  không thể là số chính phương.

**Bài 2:** Tổng các chữ số của một số chính phương có thể là  không?

**Lời giải**

Tổng các chữ số của một số là  thì số đó chia hết cho  nhưng không chia hết cho , nên không tồn tại số chính phương có tổng các chữ số là .

**Bài 3:** Cho các số tự nhiên: . Lập được tất cả các số tự nhiên có  chữ số bao gồm tất cả các chữ số trên. Trong các số đã lập có số nào là số chính phương không?

**Lời giải**

Tổng các chữ số của các số là  chia hết cho  nhưng không chia hết cho .

**Bài 4:** Cho một số tự nhiên gồm  chữ số . Có cách nào viết thêm các chữ số  vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương hay không?

**Lời giải**

 nhưng không chia hết cho  .

**Bài 5:** Chứng minh rằng số  không phải là số chính phương.

**Lời giải**

Cách 1: Ta thấy số  chia hết cho  (vì chữ số tân cùng là ) nhưng không chia hết cho  (vì hai chữ số tận cùng là ).

Do đó: số  không là số chính phương.

Cách 2: Ta thấy số  chia hết cho  (vì chữ số tân cùng là ) nhưng không chia hết cho  (vì hai chữ số tận cùng là ).

Do đó: số  không là số chính phương.

Cách 3: Số  tận cùng có lẻ chữ số 0.

**Bài 6:** Các tổng sau có phải là số chính phương không?

a)  b) 

**Lời giải**

a, Ta có:  chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho  nên không là số chính phương.

b, Ta có:  có tổng các chữ số là 3 nên chia hết cho  mà không chia hết cho nên không là số chính phương.

**Bài 7:** Cho . Chứng minh S không phải là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 

Với mọi số tự nhiên  thì 

Suy ra: 

Do đó:  chia  dư 

Hay 

Mặt khác 

Vậy S không là số chính phương.

**Bài 8:** Chứng minh tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

**Lời giải**

Gọi bốn số tự nhiên lên tiếp lần lượt là 

Khi đó ta xét: 



Ta có:  (1)

 (2)

Từ (1) và (2)  S không là số chính phương

Vậy tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

**Bài 9:** Viết liên tiếp các số tự nhiên từ  đến  thành một số . Chứng minh  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 

Ta có tổng các chữ số của A là: 

Ta thấy: 



Do đó  không là số chính phương.

**Bài 10:** Số  có phải là số chính phương không?

**Lời giải:**

Ta có: 

Suy ra: 









Ta thấy:  không là số chính phương

**Bài 11:** Viết liên tiếp từ  đến  được số . Số  có thể có  ước được không?

**Lời giải**

Giả sử số  có  ước.

Vì số lượng các ước của  là  (là số lẻ) nên  là số chính phương 

mặt khác, tổng của các chữ số của  là:.Vì ; nên  chia hết cho  nhưng không chia hết cho , do đó  không là số chính phương

mâu thuẫn với .

Vậy  không thể có  ước.

**Bài 12:** Một số tự nhiên gồm một chữ số  và sáu chữ số 6 có thể là một số chính phương không?

**Lời giải**

Gọi  là số gồm một chữ số  và sáu chữ số .

- Nếu  có chữ số tận cùng là  thì  có hai chữ số tận cùng là .

 chia hết cho 5 nhưng  không chia hết cho  (vì )

 không là số chính phương.

- Nếu  có chữ số tận cùng là   có hai chữ số tận cùng là 06 hoặc 

 chia hết cho  nhưng không chia hết cho .

 không là số chính phương.

Vậy  không phải là số chính phương.

**DẠNG 2: Chứa thừa số nguyên tố với số mũ lẻ**

**Bài 1:** Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: ****** chứa thừa số nguyên tố có số mũ lẻ

Do đó:  không là số chính phương

**Bài 2:** Chứng minh rằng số  không là số chính phương.

**Lời giải**



Ta có  nhưng  không chia hết cho  mà  là số nguyên tố từ đó suy ra  không là số chính phương.

**DẠNG 3: và ( : nguyên tố)  không là số chính phương**

**Bài 1:** Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 

(Vô lý)

Do đó  không là số chính phương.

**Bài 2:** Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 

Vì  đồng thời  mà  là số nguyên tố.

Do đó  không là số chính phương.

**Bài 3:** Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 

Vì  là số nguyên tố nên  (Vô lý).

Do đó  không là số chính phương.

**DẠNG 4: Chứng minh  chia dư , chia  dư** **; ; chia  dư , ; chia  dư ;; ; **

**Bài 1:**

a. Chứng minh rằng với  thì  không là số chính phương

b. Chứng minh rằng với  thì  không là số chính phương

**Lời giải**

a.  chia 4 dư 3 nên không là số chính phương

b. -  không là số chính phương

-  không là số chính phương

-  không là số chính phương

**Bài 2:** Chứng minh rằng một số có tổng các chữ số của nó là  không phải là một số chính phương

**Lời giải**

Số chính phương khi chia cho  chỉ có thể dư  hoặc .

Số trên có tổng các chữ số là  nên chia  dư , vậy không phải là số chính phương.

**Bài 3:** Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng  thì có thể là số chính phương được không? Tại sao?

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng  là .

Ta có: ,  nên số tự nhiên  chia  dư , do đó số  có dạng  với  là số tự nhiên. Mặt khác số chính phương không có dạng  suy ra số tự nhiên  không là số chính phương.

**Bài 4:** Chứng minh rằng  không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương .

**Lời giải**

Ta có: ; ; 

; 

Do đó: .

Ta lại có: 



Do 

Do 

Do đó  nghĩa là  chia cho  dư .

Ta có  là số nguyên tố. Vậy  không là số chính phương.

**Bài 5:** Cho . Chứng minh rằng ;  không là số chính phương.

**Lời giải**

+) Ta có: 

Suy ra:  chia cho  dư 

Do đó:  không là số chính phương.

+) Ta có:  và 

Suy ra:  nhưng 

Do đó:  không là số chính phương.

**Bài 6:** Gọi  là tích của  số nguyên tố đầu tiên . Chứng minh rằng các số ; ;  không là số chính phương.

**Lời giải**

+) Ta thấy:  nhưng 

  không là số chính phương.

+) Giả sử  hay 

Ta có:  lẻ suy ra  lẻ nên  (mâu thuẫn)

Do đó điều giả sử là sai.

Vậy  không là số chính phương.

+) Ta có: 



Vậy  không là số chính phương.

**Bài 7:** Giả sử . Chứng minh rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp ; ;  không có số nào là số chính phương.

**Lời giải**

+) Ta có: 

Ta thấy: 

Do đó:  không là số chính phương.

+) Ta có:   chẵn

Do đó:  lẻ  và  nhưng 

Ta thấy  chẵn nên  không chia cho  dư  hoặc dư 

Vậy  không là số chính phương

+) Ta có: 

Ta thấy  lẻ nên 

nên không chia cho  dư 

Do đó:  không là số chính phương.

**Bài 8:** Chứng minh số  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có:  chia  dư  nên  chia  dư 

 chia  dư 

 chia  dư 

Suy ra:  chia  dư 

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 9:** Chứng minh  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có:  chia hết cho  nên  chia hết cho 

 chia hết cho  nên  chia hết cho 

 chia hết cho  nên  chia hết cho 

 chia hết cho  nên  chia hết cho 

Suy ra:  chia hết cho 

Mà:  chia  dư 

Do đó:  chia  dư 

Vậy C không là số chính phương.

**Bài 10:** Chứng minh  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta thấy: 

 

Tương tự , 

Mà  chia  dư  nên  

Mà ta biết số chính phương không có dạng 

Do đó D không là số chính phương.

**Bài 11:** Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

**Lời giải**

Gọi  và  là số lẻ.

Giả sử: , với 

Ta có:  với 

Không có số chính phương nào có dạng  vì vậy  không phải là một số chính phương.

**Bài 12:** Chứng minh rằng tổng các số tự nhiên liên tiếp từ  đến  không phải là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 





 có dạng 

Do đó  không là số chính phương.

**Bài 13:** Cho  là tổng các bình phương của  số tự nhiên liên tiếp nào đó. Chứng minh rằng  không phải là số chính phương.

**Lời giải**

Xét tổng các bình phương của  số tự nhiên liên tiếp:



Chia  thành nhóm, mỗi nhóm là tổng các bình phương của  số tự nhiên liên tiếp

 

Do đó  không là số chính phương.

**Bài 14:** Cho  là tổng các bình phương của  số tự nhiên liên tiếp nào đó. Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải**

Xét tổng các bình phương của  số tự nhiên liên tiếp:



Chia  thành nhóm, mỗi nhóm gồm số tự nhiên liên tiếp.

Suy ra: 

Do đó  không là số chính phương.

**Bài 15:** Chứng minh không phải là số chính phương với 

**Lời giải:**

Xét  lẻ. Đặt 

Ta có: 





 không là số chính phương

Xét  chẵn. Đặt 

Vì  nên ta đặt 

Khi đó, ta có: 















 (trái với giả thiết đề bài)

Vậy:  không phải là số chính phương với 

**Bài 16:** Chứng minh  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Bổ đề: 

Theo định lí Fermat, ta có: 





Giả sử 

Suy ra:  (vô lý)

Do đó:  không là số chính phương.

**Bài 17:** Chứng minh rằng với mọi số  thì số  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Bất kì số chính phương nào cũng có dạng  hoặc , với 

Ta có:  có dạng 

Do đó  không là số chính phương.

**DẠNG 5: Chứng minh  có chữ số tận cùng là hoặc **

**Bài 1:** Chứng minh rằng các tổng sau có phải là số chính phương không?

**a)**  **b)** 

**Lời giải:**

b) Tổng  có chữ số tận cùng là  nên không là số chính phương

c) Ta có:  có chữ số tận cùng là .

Nên  có chữ số tận cùng là 

Vậy  không là số chính phương.

**Bài 2:** Cho . Chứng minh rằng  không phải là số chính phương.

**Lời giải:**

Ta có các số ; ; ;  đều có chữ số tận cùng là .

Nên  có chữ số tận cùng là .

Vậy  không là số chính phương vì số chính phương là những số có tận cùng là .

**Bài 3:** Chứng minh rằng tổng các bình phương của năm số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

**Lời giải**

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp là:  trong đó  và 

Xét tổng bình phương: .

Vì  không thể có tận cùng là  hoặc , nên  không thể có tận cùng là  hoặc ,

 không thể chia hết cho 

 không thể chia hết cho 

Vậy  không là số chính phương

**DẠNG 6: Chứng minh  kẹp giữa hai số chính phương liên tiếp **

**Bài tập:** Chứng minh rằng số  không là số chính phương.

*Nhận xét*:

Số này có hai chữ số tận cùng là  nên chia cho  dư  và chia cho  cũng dư , nên không thể áp dụng bằng cách trên.

**Lời giải:**

*Cách 1:*

Ta thấy:  ; . Nên  . Chứng tỏ số  không phải là số chính phương.

*Cách 2:*

Ta có: 

Muốn là số chính phương thì  phải là số chính phương

Ta lại có: 



Mà: 

  không là số chính phương.

Do đó số  không là số chính phương

**PHẦN III. CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN:**

**Bài 1:** Chứng minh rằng với mọi số  thì số  không là số chính phương.

**Lời giải**

Bất kì số chính phương nào cũng có dạng  hoặc , .

Ta có:  có dạng , 

Suy ra: A không là số chính phương.

**Bài 2:** Chứng minh rằng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là số chính phương.

**Lời giải**

Gọi hai số lẻ bất kì là  và .

Vì  và lẻ nên ; ; 

Suy ra: 







Do đó:  không là số chính phương.

**Bài 3:** Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 

Ta thấy: A chia cho  dư 

Do đó: A không là số chính phương.

**Bài 4:** Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 

Vì: 



Mà một số chính phương chia  dư  hoặc 

Do đó: không là số chính phương.

**Bài 5:** Chứng minh rằng  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 





Ta có số chính phương chia  có thể dư  hoặc 

 nên có 5 trường hợp xảy ra

\* TH1: Nếu  thì ;  mà  chia  dư 

 chia  dư 

 A chia  dư 

 A không là số chính phương

\* TH2: Nếu  chia  dư  thì  chia  dư ,  chia  dư  mà  chia  dư 

 chia  dư 

 A chia  dư 

 A không là số chính phương

\* TH3: Nếu  chia  dư  thì  chia  dư ;  chia  dư   chia  dư ,

 chia  dư 

 chia  dư 

 A chia  dư 

 A không là số chính phương

\* TH4: Nếu  chia  dư  thì  chia  dư ;  chia  dư  chia  dư ,

 chia  dư ;  chia  dư  chia  dư 

 chia  dư 

 A chia  dư 

 A không là số chính phương

\* TH5: Nếu  chia  dư  thì  chia  dư ;  chia  dư  chia  dư ,

 chia  dư ;  chia  dư  chia  dư 

 chia  dư 

 A chia  dư 

 A không là số chính phương

Vậy A không là số chính phương với mọi .

**Bài 6:** Cho là tích của  số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng  và  không là số nguyên tố. **(Đề HSG Hương Sơn năm học 2015 - 2016)**

**Lời giải:**

Vì  là tích của  số nguyên tố đầu tiên nên  chia hết cho  và không chia hết cho 

Ta chứng minh  là số chính phương

Giả sử  là số chính phương.

Đặt . Vì  chẵn nên  lẻ

  lẻ   lẻ

Đặt . Ta có: 



 chia hết cho 

Ta chứng minh  là số chính phương

Ta có:  chia hết cho 



Vì không có số chính phương nào có dạng  nên  không phải số chính phương

Vậy nếu là tích của  số nguyên tố đầu tiên thì  và  không phải số chính phương.

**Bài 7:** Cho . Chứng minh B không là số chính phương. **(Đề HSG Vĩnh Tường năm học 2019 - 2020)**

**Lời giải:**

Ta có: 











Ta thấy: 

Suy ra: 

Mà: 

Do đó: 

Hay: 

Vậy B không là số chính phương.

**Bài 8:** Cho biểu thức . Chứng minh  không phải là số chính phương.

**(Đề HSG Quỳnh Lưu năm học 2018 - 2019)**

**Lời giải**

Ta thấy: 

Mặt khác:  (vì tất cả các số đều chia hết cho )

  (do )

Do đó  chia hết cho  nhưng không chia hết cho 

Vậy  không là số chính phương.