**ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 5-SỐ NGUYÊN TỐ,HỢP SỐ**

**CHỦ ĐỀ 1:ĐỊNH NGHĨA,TÍNH CHẤT,SỐ NGUYÊN TỐ,HỢP SỐ**

**PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1.SỐ NGUYÊN TỐ**

-Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1,chỉ có 2 ước là 1 và chính nó.

-Số nguyên tố nhỏ nhất vừa là số nguyên tố chẵn duy nhất là số 2.

-Không thể giới hạn số nguyên tố cũng như tập hợp số nguyên tố.Hay nói cách khác,số nguyên tố là vô hạn.

-Khi 2 số nguyên tố nhân với nhau thì tích của chúng không bao giờ là một số chính phương.

-Ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên được coi là số nguyên tố.

-Để kết luận số tự nhiên a là một số nguyên tố , chỉ cần chứng minh a không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a.

-Nếu tích  ( là số nguyên tố)

-Đặc biệt nếu  ( là số nguyên tố)

-Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: 

-Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: 

-Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị.

**2.HỢP SỐ**

-Hợp số là số tự nhiên lớn lơn 1 và có nhiều hơn 2 ước nguyên dương.

-Để chứng tỏ một số tự nhiên   là hợp số,chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và .

-Ước số nhỏ nhất khác 1 của một hợp số là một số nguyên tố và bình phương lên không vượt quá nó.

-Một hợp số bằng tổng các ước của nó (không kể chính nó) được gọi là: Số hoàn chỉnh.

-Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất (không kể thứ tự các thừa số)

**3.HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU**

-Hai số tự nhiên được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng có ước chung lớn nhất bằng 1.

 nguyên tố với nhau 

- Hai số tự nhiên liên tiếp luôn nguyên tố cùng nhau

- Hai số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau

- Các số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau

- Các số nguyên tố cùng nhau 

- nguyên tố sánh đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau  nguyên tố sánh đôi



**4.MỘT SỐ ĐỊNH LÍ ĐẶC BIỆT**

**-** Định lí Đirichlet: Tồn tai vô số số nguyên tổ p có dạng: 

- Định lí Tchebycheff: Trong khoảng từ số tự nhiên  đến số tự nhiên  có ít nhất một số nguyên tố 

- Định lí Vinogradow: Mọi số lẻ lớn hơn là tổng của 3 số nguyên tố.

**PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI**

**Dạng 1:Tính chất đặc trưng của số nguyên tố và cách nhận biết số nguyên tố,hợp số.**

***I.Phương pháp giải***

- Dựa vào các dấu hiệu chia hết và các tính chất về số nguyên tố ,hợp số, để giải các bài toán về chứng minh hoặc giải thích.

- Thông qua việc phân tích và xét hết khả năng có thể xảy ra, đối chiếu với giả thiết và các định lý, hệ quả đã học để loại bỏ các trường hợp mâu thuẫn và nhận biết được đâu là số nguyên tố, hợp số.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh rằng:

a, Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: 

b, Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: 

***Lời giải:***

a, Gọi  là một số tự nhiên lớn hơn 2. Khi đó  sẽ có dạng 

-Nếu  hay thì và  là hợp số

Suy ra nếu  là số nguyên tố thì  sẽ có dạng 

Vì  nên suy ra mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng:  (đpcm)

b, Gọi  là một số tự nhiên lớn hơn 3.Khi đó  sẽ có dạng 

-Nếu hay thì và  là hợp số.

-Nếu thì và  là hợp số.

Suy ra nếu  là số nguyên tố thì  sẽ có dạng 

Vì  nên suy ra mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng:  (đpcm)

**Bài 2:** Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số này là số chẵn hay số lẻ?

***Lời giải:***

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số nguyên tố lẻ. Do đó tổng 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

**Bài 3:** Tổng 2 số nguyên tố có thể bằng 2003 được không ?

***Lời giải:***

Ta thấy 2003 là một số lẻ nên nếu 2003 là tổng của hai số nguyên tố thì một trong hai số phải là số chẵn và bằng 2. Vậy số còn lại là 2001 nhưng 2001 lại không là số nguyên tố vì 

Vậy tổng của hai số nguyên tó không thể bằng 2003.

**Bài 4:** Cho  và  là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng tổng của chúng chia hết cho 12.

***Lời giải:***

Ta thấy  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  có dạng 

TH1:  thì 

Mà  là số lớn hơn 3 nên  là hợp số ( Trái với GT, loại )

TH2: thì 

Khi đó 



**Bài 5:** Cho  là số nguyên tố và một trong hai  là số nguyên tố .Hỏi số còn lại là số nguyên tố hay hợp số.

***Lời giải:***

-Nếu thì là hợp số

-Nếu thì là hợp số

-Nếu thì  không chia hết cho 3

Vậy 1 trong 2 số  sẽ chia hết cho 3 và là hợp số.

Vậy số còn lại là hợp số.

**Bài 6:** Hai số có thể cùng là số nguyên tố hay không ? Vì sao ?

***Lời giải:***

Vì là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3.Mà và 3 là số nguyên tố nên  không chia hết cho 3. 

Mà nên  

Từ ,suy ra 1 trong 2 số phải chia hết cho 3.

 Hai số không thể cùng là số nguyên tố.

**Bài 7:** Cho 3 số nguyên tố lớn hơn 3,trong đó số sau lớn hơn số trước là  đơn vị.Chứng minh rằng .

***Lời giải***

Các số nguyên tố lớn hơn 3 nên  có dạng hoặc 

Có 3 số mà chỉ có 2 dạng nên tồn tại hai số thuộc cùng một dạng, hiệu của chúng ( là  hoặc  ) chia hết cho 3 ( theo nguyên lý Drichlet ). Mặt khác  chia hết cho 2 vì  là hiệu của hai số lẻ.Vậy  chia hết cho 6.

**Bài 8:** Hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 3 nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

***Lời giải:***

Gọi  là số nguyên tố lơn hơn 3 và  lẻ nên  

Mà  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  có dạng .

Dạng không xảy ra vì nếu thì  là hợp số (Loại)

 

Từ ,ĐPCM

**Bài 9:** Cho  và là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi  là số nguyên tố hay là hợp số ?

***Lời giải:***

Ta thấy  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  có dạng 

TH1:  thì 

Mà  là số lớn hơn 3 nên  là hợp số ( Trái với GT, loại )

TH2: thì 

Khi đó 

Mà  là số lớn hơn 3 nên  là hợp số.

**Bài 10:** Cho  và  là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi  là số nguyên tố hay hợp số ?

***Lời giải:***

Ta thấy  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng 

TH1:  thì 

Mà  là số lớn hơn 3 nên  là hợp số ( Trái với GT, loại )

TH2: thì 

Khi đó 

Mà  là số lớn hơn 3 nên  là hợp số.

**Bài 11:** Chứng minh rằng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử  là số nguyên tố và  có dạng 

Nếu  là hợp số thì  có ước nguyên tố  sao cho 

Nhưng với thì p lần lượt chia hết cho  ( Vô lý )

Vậy  hoặc  là số nguyên tố.

**Bài 12:** Một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là .Tìm  biết rằng  không là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gọi số nguyên tố là  ()

Ta có:

Vì  là số nguyên tố nên r không chia hết cho 

Số nguyên dương không là số nguyên tố nhỏ hơn 30 và không chia hết cho  chỉ có số 1.

Vậy .

**Bài 13:** Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là . Tìm r biết rằng  là hợp số.

***Lời giải:***

Gọi số nguyên tố là  ()

Ta có:

Vì  là số nguyên tố nên  không chia hết cho .

Số nguyên dương là hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho chỉ có số 25.

Vậy .

**Bài 14:** Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 1997 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không ?

***Lời giải:***

Chọn dãy số:

 

 

 

……............. ………….

 

Như vậy: Dãy số gồm có 1997 số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

**Bài 15:** Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được  số liên tiếp nhau  mà không có số nguyên tố nào hay không ?

***Lời giải:***

Chọn dãy số:

  nên  là hợp số

  nên  là hợp số

  nên  là hợp số

……............. ………….

  nên  là hợp số

Như vậy: Dãy số gồm có  số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

**Bài 16:** Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số này là số chẵn hay số lẻ?

***Lời giải:***

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số nguyên tố lẻ. Do đó tổng 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

**Bài 17:** Chứng minh rằng nếu tổng của  lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì 

***Lời giải:***

Số nguyên tố  khi chia cho 30 chỉ có thể dư là: 

Với  thì  tương tự với , , 

Với  thì  tương tự với , , 

Suy ra 

Giả sử  là các số nguyên tố lớn hơn 5

Khi đó 

 là số nguyên tố nên .

**Dạng 2:Tìm số nguyên tố p để thỏa mãn điều kiện.**

***I.Phương pháp giải***

- Trong  số tự nhiên liên tiếp chỉ có một và chỉ một số chia hết cho .

- Nắm chắc các tính chất đặc trưng của số nguyên tố để giải bài toán.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Tìm số nguyên tố  sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a, 

b, 

***Lời giải:***

a, Vì  là số nguyên tố và 10;14 là hợp số

 có dạng .

-Nếu  là hợp số (Loại)

-Nếu  là hợp số (Loại)

-Nếu (vì  là số nguyên tố)(đều là số nguyên tố,thỏa mãn)

Vậy thì là số nguyên tố.

b, Vì  là số nguyên tố .

 có dạng 

-Nếu là hợp số (loại)

-Nếu là hợp số (loại)

-Nếu là hợp số (loại)

-Nếu là hợp số (loại)

-Nếu mà  là số nguyên tố nên đều là số nguyên tố (thỏa mãn, lấy)

Vậy thì là số nguyên tố.

**Bài 2**: Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gọi 3 số lẻ liên tiếp là: 

Trong 3 số lẻ liên tiếp luôn có 1 số chia hết cho 3

-Nếu (vì là số nguyên tố)(Loại vì 1 không là số nguyên tố)

-Nếu (vì là số nguyên tố)(Loại vì -1 không phải là số tự nhiên)

-Nếu (vì là số nguyên tố)(Thỏa mãn vì đều là số nguyên tố)

Vậy 3 số tự nhiên lẻ cần tìm là 3,5,7.

**Bài 3:** Tìm các số nguyên tố  sao cho  vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử  là số nguyên tố cần tìm thì ta có ( đều là các số nguyên tố và )

Để  là số nguyên tố thì có một trong hai số là số chẵn và cũng có một trong hai số là số chẵn.

Giả sử thì

Ta có:.

Ta thấy là 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp.

Theo câu a.

Thử lại: 

Vậy số cần tìm là 5.

**Bài 4:**Tìm để dãy số chứa nhiều số nguyên tố nhất.

***Lời giải:***

-Nếu Ta có dãy số có các số nguyên tố làCó 4 số nguyên tố.

-Nếu Ta có dãy số có các số nguyên tố làCó 5 số nguyên tố.

-Nếu Ta có dãy số có các số nguyên tố làCó 4 số nguyên tố.

-Nếu Dãy số  đều gồm các số lớn hơn 3 và bao gồm 5 số lẻ liên tiếp và 5 sô chẵn liên tiếp.

Vì các số trong dãy đều lớn hơn 3 nên suy ra 5 số chẵn liên tiếp đều là hợp số và trong 5 số lẻ liên tiếp tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3 và số này cũng là hợp số.

Vậy là giá trị cần tìm.

**Bài 5:** Ta gọi  là 2 số nguyên tố liên tiếp nếu giữa  và  không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp  sao cho cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

+Nếu  đều khác 3 mà  là các số nguyên tố.

chia 3 dư 1 hoặc dư 2 ( hay dư -1 ).

chia 3 dư 1.

chia hết cho 3.

Vậy tồn tại 1 số bằng 3.

TH1: Ba số nguyên tố đó là 2, 3, 5 Khi đó  là hợp số ( Loại )

TH2: Ba số nguyên tố đó là 3, 5, 7 Khi đólà số nguyên tố ( Thỏa mãn )

Vậy 3 số nguyên tố liên tiếp cần tìm là: .

**Bài 6:** Tìm 3 số nguyên tố sao cho: .

***Lời giải:***

Vì r là số lẻ ( là số nguyên tố ).

có 1 số lẻ và 1 số chẵn.

Giả sử là số chẵn chẵn ( vì  là số nguyên tố )

+Nếu 

Mặt khác  là số lẻ 



( Vì  là số nguyên tố )

 ( Loại vì  là số nguyên tố nên )

+Nếu thì là số nguyên tố ( Thỏa mãn )

Vậy .

**Bài 7:** Đề thi học sinh giỏi 2020-20121,huyện Yên Mô:

Cho  là 3 số nguyên tố khác nhau đôi một.Tìm 3 số  để giá trị của biểu thức:

đạt GTLN.

***Lời giải:***

Ta có:  là 3 số nguyên tố khác nhau nên ;;



Vì vai trò  như nhau nên để không mất tính mất tính tổng quát ta giả sử:

Mà  là 3 số nguyên tố nên 

.



Vậy  đạt GTLN khi và các hoán vị của nó.

**Bài 8:** Tìm 2 số nguyên tố có tổng bằng 2005.

***Lời giải:***

Ta thấy tổng số nguyên tố hai số cần tìm là số lẻ nên một trong hai số cần tìm phải là số nguyên tố chẵn và bằng 2. Khi đó số còn lại là 2003 ( là số nguyên tố, thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là 2 và 2003.

**Bài 9:** Tìm 2 số nguyên tố có tổng bằng 309.

***Lời giải:***

Ta thấy tổng số nguyên tố hai số cần tìm là số lẻ nên một trong hai số cần tìm phải là số nguyên tố chẵn và bằng 2. Khi đó số còn lại là 307 ( là số nguyên tố, thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là 2 và 307.

**Bài 10:** Tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong 3 số.

***Lời giải:***

Trong ba số nguyên tố có tổng bằng 1012, phải có một số chẵn, là số 2. Đó là số nhỏ nhất trong ba số.

**Bài 11:** Tìm tất cả các số nguyên tố p để  là số nguyên tố nhỏ hơn 30.

***Lời giải:***

Vì  là số nguyên tố nên 

Mà  là số nguyên tố nhỏ hơn 30 nên 

+ Nếu  thì  là số nguyên tố ( Thỏa mãn, lấy )

+ Nếu  thì  là số nguyên tố ( Thỏa mãn, lấy )

+ Nếu  thì  không là số nguyên tố ( Trái với GT, loại )

Vậy số nguyên tố cần tìm là 2 và 3.

**Bài 12:** Tìm các số nguyên tố  thỏa mãn 

***Lời giải:***





Do  là số nguyên tố và  nên chỉ xảy ra các trường hợp sau:

TH1: 

TH2:  vô nghiệm nguyên tố

TH3: 

Vậy cặp nguyên tố duy nhất thỏa mãn đề bài là 

**Bài 13:** Tìm các số nguyên tố  thỏa mãn .

***Lời giải:***

Ta có:



Mà ;  là số nguyên tố nên

 

hoặc  

không có  thỏa mãn  và  Vậy không tồn tại  nguyên tố để 

**Bài 14:** Tìm tất cả các bộ ba số  sao cho

***Lời giải:***

Vì  có vai trò như nhau nên giả sử  khi đó





vì  là số nguyên tố.

Với  thì ta có 

 ( vì p là số nguyên tố )

+ Nếu  thì  thỏa mãn với  là số nguyên tố bất kì

+ Nếu  thì 

Vậy các cặp số  cần tìm là  và các hoán vị của chúng, với  là số nguyên tố.

**Dạng 3: Các bài toán chứng minh số nguyên tố,hợp số**

***I.Phương pháp giải***

**-**Dựa vào các tính chất đặc trưng của số nguyên tố và hợp số để giải các bài toán về chứng minh số nguyên tố, hợp số.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Cho  và  là các số nguyên tố ().Chứng minh rằng là hợp số .

***Lời giải:***

Ta có:  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  có dạng 

+Nếu thì là hợp số ( Trái với GT,loại )

Vậy  có dạng , khi đó  là hợp số

ĐPCM

**Bài 2:** Cho  và  là các số nguyên tố. Chứng minh rằng  là hợp số.

***Lời giải:***

Ta xét các trường hợp: 

TH1:  thì  là các hợp số ( Trái với giả thiết,loại )

TH2: ( vì  là số nguyên tố )  là số nguyên tố

Và khi đó  là hợp số 

TH3: thì 

Và khi đó  là hợp số 

Từ ,ta suy ra  là hợp số ĐPCM

**Bài 3:** Chứng minh rằng  chia hết cho  nếu  là hợp số, không chia hết cho  nếu  là số nguyên tố.

***Lời giải:***

+TH1:  là hợp số:

Nếu  là hợp số thì  là tích các thừa số nguyên tố nhỏ hơn  và số mũ các lũy thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các lũy thừa ấy trong .

Vậy:  ( ĐPCM )

+TH2:  là số nguyên tố:

Vì  là số nguyên tố nên  nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của 

Kết hợp với  không chia hết cho  ( ĐPCM )

**Bài 4:** Cho  là số nguyên tố. Chứng minh rằng  cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử  là hợp số 

Khi đó: 

Vì ( Giả sử ) nên  và nên  là hợp số ( Trái với giả thiết )Giả sử là sai   không thể là hợp số  là số nguyên tố (ĐPCM)

**Bài 5:** Chứng minh rằng: mọi số nguyên tố của đều lớn hơn 1994.

***Lời giải:***

Gọi  là ước số nguyên tố của 

Giả sử chia hết cho p chia hết cho 

Mà nên  ( vô lý )

Vậy  ( ĐPCM )

**Bài 6:** Chứng minh rằng:  thì giữa  và có ít nhất 1 số nguyên tố ( từ đó suy ra có vô số số nguyên tố ).

***Lời giải:***

Vì nên , do đó  có ít nhất một ước nguyên tố .

Ta chứng minh .Thậy vậy: nếu thì 

Mà k.Do đó  ( vô lý )

Vậy ( ĐPCM )

**Bài 7:** Hãy chứng minh các số sau là hợp số:

a) ( 2001 chữ số 1 );

b) 

c) 

d) 

***Lời giải:***

a) Tổng các chữ số của  là: 

mà nên  là hợp số ( ĐPCM )

b) là hợp số ( đpcm )

c) Vì và  luôn chia hết cho 3 nên 

Mà nên  là hợp số (ĐPCM )

d) 

 là hợp số (ĐPCM )

**Bài 8:** Chứng minh rằng số  là hợp số.

***Lời giải:***

Đặt , khi đó













 là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên  là hợp số ( ĐPCM )

**Bài 9:** Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì  là hợp số.

***Lời giải:***

Với  nên 

Hay 



Tức là 

Mà  nên  là hợp số. ( ĐPCM )

**Bài 10:** Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì  là hợp số.

**Lời giải:**

**+** Nếu  thì 

+ Nếu  thì 



+ Nếu  thì





Như vậy với mọi giá trị  thì số  là hợp số.

**Bài 11:** Cho , biết .Chứng minh rằng: 

***Lời giải:***

Ta có ,mà 5 là số nguyên tố nên suy ra .

Mà nên đpcm

**Bài 12:** Cho .Chứng minh rằng nếu  chia hết cho  thì  là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử  không là số nguyên tố.

Do đó  có ước nguyên tố 

Do đó .

Mặt khác , nên 

( Vô lí )

Mà  nguyên dương nên .

Vậy  là số nguyên tố ( đpcm )

**Bài 13:** Cho các số nguyên dương  thỏa mãn . Chứng minh rằng  là hợp số.

***Lời giải:***

Giả sử 

Đặt 



Mà 

Đặt ,

Ta có



Vì là số nguyên dương nên  là hợp số.

**Bài 14:** Chứng minh rằng có vô số nguyên tố có dạng: 

***Lời giải:***

Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 có 1 trong 3 dạng:

+Những số có dạng  mà nên là hợp số.

+Xét 2 số có dạng :đó là số và 

Xét tích 

Tích trên có dạng 

+ Lấy một số nguyên tố  có dạng  (với  là số nguyên tố bất kỳ ) ta lập tích của  với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn  rời trừ đi 1 ta có:



 có dạng: 

Có 2 khả năng xảy ra:

\*Khả năng 1:  là số nguyên tố có dang ,bài toán được chứng minh.

\*Khả năng 2: là hợp số: Ta chia cho đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước số nguyên tố của  đều lớn hơn , trong các ước này không có số nào có dạng (đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của  phải có dạng ( hợp số ) hoặc .

Vậy có vô số nguyên tố có dạng: 

**Bài 15:** Chứng minh có vô số số nguyên tố có dạng 

***Lời giải:***

Các số nguyên tố lẻ không thể có dạng  và .

Vậy chúng chỉ có thể tồn tại dưới dạng hoặc 

+ Xét tích 2 số có dạng là:và 

Ta có:

Vậy tích của 2 số có dạng là một số cũng có dạng

+Lấy một số nguyên tố p bất kỳ có dạng , ta lập tích của  với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn  rồi chứ đi 1 khi ta có:



Có 2 khả năng xảy ra:

\*Khả năng 1:  là số nguyên tố có dang ,bài toán được chứng minh.

\*Khả năng 2:  là hợp số: Ta chia M cho  đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước số nguyên tố của  đều lớn hơn ,trong các ước này không có số nào có dạng ( đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của  phải có dạng ( hợp số ) hoặc .mà ước này hiển nhiên lơn hơn .

**Dạng 5: Áp dụng định lí Fermat**

***I.Phương pháp giải***

-Định lí Fermat nhỏ: với  là số nguyên tố.

-Bằng cách sử dụng định lí Fermat để giải các bài toán về số nguyên tố.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh định lí Fermat nhỏ. Nếu  là số nguyên tố và thì với mọi số nguyên dương .

***Lời giải:***

Vì  không chia hết cho  nên các số cũng không chia hết cho . Giả sử khi các số chia cho  được các số dư là 

đôi một khác nhau.

Thật vậy nếu có thì  

Mà  không chia hết cho  và  không chia hết cho  nên  không xảy ra.

do đó 





Vì 

**Bài 2:** Chứng minh rằng tổng 

***Lời giải:***

Vì mà  nên chỉ cần chứng minh và 

\* Chứng minh chia hết cho 1983





Ta có :

 ( nguyên )

Vậy hiệu này chia hết cho 1983. Từ đó suy ra S chia hết cho 1983. 

\* Chứng minh chia hết cho 101

Trừ các số chia hết cho 101 là  trong tổng  còn lại các số có dạng với . Mà 101 là số nguyên tố nên theo định lí Fermat nhỏ, thì các số này chia 101 dư 1. Số các số hạng mang dấu cộng bằng số số hạng mang dấu trừ. Từ đó suy ra  chia hết cho 101 

Từ , suy ra  chia hết cho 200283.

**Bài 3:** Nhà toán học Pháp Fermat đã đưa ra công thức 

để tìm các số nguyên tố với mọi số tự nhiên .

1. Hãy tính giá trị của công thức này khi .

2. Với giá trị này hãy chứng tỏ ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối bằng tổng các chữ số còn lại.

b) Tổng bình phương các chữ số là số chính phương.

c) Hiệu giữa tổng các bình phương của hai chữ số đầu và cuối với tổng các bình phương của các chữ số còn lại bằng tổng các chữ số của số đó.

***Lời giải:***

1. Ta thay  vào công thức Fermat và được:

 là số nguyên tố.

2. Số nguyên tố 65537 có ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối đúng bằng tổng ba chữ số còn lại .

b) Tổng bình phương các chữ số 

là số chính phương.

c) Tổng bình phương của hai chữ số đầu và cuối là 

Tổng các bình phương của ba chữ số còn lại là:

Tổng các chữ số đó là: 

Ta nhận thấy rằng: 

Hiệu này đúng bằng tổng các chữ số của số nguyên tố

**Bài 4:** Cho , chứng minh rằng: là hợp số.

***Lời giải:***

Ta chứng minh với mọi 

Ta có:.

Theo định lý Fermat:





Mà nên là hợp số ( ĐPCM )

**Bài 5:** Cho, chứng minh rằng: là hợp số.

***Lời giải:***

Theo định lí Fermat nhỏ ta có  .

Ta tìm số dư trong phép chia  và  cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng chúng.





Mà  và  nên



Mà  với mọi số tự nhiên  khác 0

Vậy  là hợp số với mọi số tự nhiên  khác 0.

**Bài 6:** Tìm số nguyên tố p để 

***Lời giải:***

Vì  là số nguyên tố mà .

Ta thấy  không chia hết cho 2 vì .

Theo định lí Fermat nhỏ ta có mà ( Giả thiết )

**** ( vì )

( vì  là số nguyên tố )

Vậy số nguyên tố cần tìm là 3.

**Bài 7:** Cho  là số nguyên tố  lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên  thỏa mãn 

***Lời giải:***

Ta có: , ta tìm  sao cho .

Ta có: 

Vậy, với thì.

**Bài 8:** Cho  là số nguyên tố,chứng minh rằng sốchỉ có ước nguyên tố có dạng là: .

***Lời giải:***

Gọi  là ước nguyên tố của  thì  lẻ, nên theo định lý Fermat:

,vì nếu  thì ,vô lý.

Mặt khác chẵn

**Bài 9:** Chứng minh rằng dãy số với  chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gỉa sử tồn tại số nguyên tố sao cho:

 

Trong đó  là các số nguyên dương nào đó.

Từ  dễ thấy  không chia hết cho 23 nên .

Theo định lý Fermat thì với mọi số nguyên dương .

Từ đó  hay với mọi 

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn .Chẳng hạn:

Với thì 

Với thì 

Với thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn .

**Bài 10:** Giả sử  là số nguyên tố lẻ đặt  . Chứng minh rằng m là một hợp số lẻ không chia hết cho 3 và .

***Lời giải:***

Ta có 

dễ thấy  đều là số nguyên dương lớn hơn 1 nên  là hợp số mà  suy ra  lẻ và chia 3 dư 1.

Theo định lí Fermat nhỏ:  vì 

Vì  chẵn nên cũng có 

Do đó ĐPCM

**Bài 11:** Cho số nguyên tố , các số dương  Tìm số dư khi chia  cho .

***Lời giải:;***

Xét các trường hợp sau:

1) .Ta có 

  lẻ. Đặt 



Dễ suy ra .

2) ta có   ( định lí Fermat nhỏ )



 vì  không chia hết cho 



mà 



**Bài 12:** Chứng minh rằng ( với  là số nguyên tố lớn hơn 7 )

***Lời giải:***

Ta có: 

.

vì  là số nguyên tố lớn hơn 7 nên  chỉ có thể có dạng 

Nếu 



Vì 

Nếu 

Ta cũng có:  

Vậy  chia hết cho 7

Mặt khác theo định lí Fermat nhỏ ta có:

 và  nên 

đôi một nguyên tố cùng nhau nên   ( đpcm )

**Bài 13:** Cho  là hai số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng: chia hết cho

***Lời giải:***

Áp dụng định lý Fermat nhỏ ta có:  do  là số nguyên tố). 

Vì  là các số nguyên tố nên 

Từ  suy ra  

Từ  suy ra  

Vì  và  có vai trò như nhau nên  

Lại vì  nên từ  và  ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 14:** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 

***Lời giải:***

Ta có 2 không chia hết cho 7; 7 là số nguyên tố nên theo định lí Fermat ta có 

Ta có 

Do đó tất cả các số chia hết cho 3 đều thỏa mãn yên cầu đề bài.

**Bài 15:** Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho 

***Lời giải:***

Gỉa sử số nguyên tố  thỏa mãn điều kiện đã cho.

Khi đó 

Vì  nên theo định lí Fermat nhỏ ta có : 

Từ đó suy ra  nên 

Thử lại ta thấy  thỏa mãn điều kiện đề bài.

**Dạng 6: Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau**

***I.Phương pháp giải***

- Sử dụng lý thuyết và tính chất của 2 số nguyên tố cùng nhau để giải các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh rằng: 5 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Ta có  ; 



Vậy hai số 5 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 2:** Chứng minh rằng: Hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp là: 

Đặt 



Vậy  và  là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 3:** Chứng minh rằng:Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Gọi 2 số lẻ liên tiếp là: .

Đặt 





Mà  là ước số lẻ nên . Vậy hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 4:** Chứng minh rằng : và là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***



.

Vậy và là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 5 :** Cho  và  là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau:  và .

***Lời giải:***

Đặt 



Mà  và  là 2 số nguyên tố cùng nhau nên 

Vậy  và là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 6:** Cho  và  là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau:  và 

***Lời giải:***

Đặt 



Mà  và  là 2 số nguyên tố cùng nhau nên 

Vậy  và  là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 7:** Cho  và  là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau:  và .

***Lời giải:***

Đặt 



+ TH1: 

Mà  và  là 2 số nguyên tố cùng nhau nên 

Vậy  và  là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

+ TH2: 

Mà  và là 2 số nguyên tố cùng nhau nên 

Vậy  và  là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 8 :** Cho  và  là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: và .

***Lời giải:***

Đặt 



Mà  và  là 2 số nguyên tố cùng nhau nên 

Vậy và  là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 9:** Chứng minh rằng nếu nếu  nguyên tố cùng với  và  thì c nguyên tố cùng nhau với tích 

***Lời giải:***

Gọi  là ước chung nguyên tố của  và .



+ TH1: 

Mà  và  là 2 số nguyên tố cùng nhau nên 

Vậy và  là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

+ TH2: 

Mà  và  là 2 số nguyên tố cùng nhau nên 

Vậy và  là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 10:** Tìm số tự nhiên n để các số  và là các số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Giả sử  vàcùng chia hết cho số nguyên tố d thì



Điều kiện để  là .Hiển nhiên vì không chia hết cho 3.Muốn

phải có ít nhất một trong 2 số  vàkhông chia hết cho 2.Ta thấy:

+ Nếu là số lẻ lẻ lẻ,

+ Nếu là số lẻ lẻ lẻ.

Vậy điều kiện để hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau là n lẻ.

**Bài 11:** Tìm số tự nhiên  để các số  và là các số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Giả sử  vàcùng chia hết cho số nguyên tố d thì



Điều kiện để  là .Hiển nhiên vì không chia hết cho 3. Muốn thì số không chia hết cho 7 (vì luôn chia hết cho 7 )



Vậy điều kiện để hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau là .

**Bài 12:** Chứng minh rằng hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên  .

***Lời giải:***

Gọi 











Mà là số lẻ nên 

Vậy hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên .

**Bài 13:** Chứng minh rằng hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên .

***Lời giải:***

Gọi 













Vậy hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên .

**Bài 14:** Chứng minh rằng hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên .

***Lời giải:***

Gọi 













Vì  là số lẻ.

Vậy hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên .

**Bài 15:** Chứng minh rằng hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên .

***Lời giải:***

Gọi 













Vậy hai số  và là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên .

**PHẦN III.BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.**

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên  để  là số nguyên tố.

*(HSG Tỉnh Quảng Ngãi 2015 – 2016).*

***Lời giải:***

Xét  thì  không phải là số nguyên tố

Xét  thì  là số nguyên tố.

Xét : 



Mà  chia hết cho, suy ra  chia hết cho .

Tương tự:  chia hết cho .

Vậy  chia hết cho  nên  là hợp số. Số tự nhiên cần tìm .

**Bài 2 :** Tìm các số nguyên tố  để  cũng là số nguyên tố.

*(HSG Thành phố Hà Nội 2016 – 2017).*

***Lời giải:***

Nếu  thì  (không thỏa mãn).

Nếu  thì  (thỏa mãn).

Nếu  thì .

Kết luận  là giá trị cần tìm.

**Bài 3:** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố  thỏa mãn .

*(Chuyên Vũng Tàu 2016 – 2017).*

***Lời giải:***



Do  và  nguyên tố nên  chỉ có thể nhận các giá trị .

Ta có bảng giá trị tương ứng:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 |  | 3 | 1 |
| 5 |  | 7 | 3 |
|  |  | 3 | 1 |
|  | 5 | 3 | 1 |

Do  là các số nguyên tố nên chỉ có cặp  thỏa mãn.

**Bài 4:** Tìm tất cả các số tự nhiên  (theo hệ thập phân) thỏa mãn các điều kiện sau: , trong đó  và  là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Do  là số nguyên tố, tức là  là số nguyên tố ta có  hoặc 9.

Từ điều kiện thứ nhất ta có: .

Theo bảng số nguyên tố ta tìm được các cặp số nguyên tố  và  thỏa mãn điệu kiện thứ nhất sau đây: ,, , , , , , , , , 

Tương ứng với  là các số sau: ; ; ; ; 409 là số nguyên tố; ; ; ; ; ; 907 là số nguyên tố.

Vậy 

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên  sao cho  và  đều là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Một số tự nhiên bất kì có 1 trong hai dạng:  với . Nếu  thì  chia hết cho 2.

Ta có  và  chia hết cho 2. Nên  là hợp số trái đề bài.

Do đó: . Nhưng  nguyên tố nên  và  nguyên tố.

Vậy .

**Bài 6:** Tìm số nguyên tố  sao cho  và  đều là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Bất kì số tự nhiên nào cũng có một trong ba dạng: . Nếu  thì , vô lí.

Nếu  thì , vô lí. Do đó .

Nhưng  nguyên tố nên  nguyên tố. Vậy .

**Bài 7:** Tìm các số nguyên tố  thỏa mãn 

***Lời giải:***

Vì  là các số nguyên tố



 là số nguyên tố lẻ

 là số chẵn  chẵn

 thay vào ta có



Nếu  lẻ  ( lẻ)

 vô lí

Do đó  là số chẵn 

Thay 

Vậy 

**Bài 8:** Tìm  để  là số nguyên tố

***Lời giải:***

1. 





Để  là số nguyên tố thì 

Thử lại với  thì  là số nguyên tố.

Vậy với  thì  là số nguyên tố.

**Bài 9:** Tìm số nguyên tốsao cho và  là các số nguyên tố (trích đề thi HSG Quãng Trạch)

***Lời giải:***

Với thì và  là các số nguyên tố

Với thì 

Nếu thì 

Nếu thì 

Vậy thì  vàlà các số nguyên tố.

**Bài 10:** Tìm các số tự nhiên  để  là số nguyên tố.( trích đề thi HSG Thanh Oai)

***Lời giải:***

Ta có 

Vì  nên để  là số nguyên tố thì 

Thử lại  là số nguyên tố

Vậy với  thì  là số nguyên tố

**Bài 11:** Chứng minh rằng nếu và là các số nguyên tố thì cũng là số nguyên tố. (trích đề thi HSG Nga Sơn)

***Lời giải:***

Với mọi số nguyên tố lớn hơn 3 thì chia hết cho 3 đều có dạng hoặc 

Với  thì chia hết cho 

Với thì  chia hết cho

Vì là số nguyên tố nên khi đó trong cả hai trường hợp trên thì  đều lớn hơn  và chia hết cho , tức là  là hợp số

 chỉ là hợp số khi khi đó là số nguyên tố

là số nguyên tố

Vậy nếu và là các số nguyên tố thì cũng là số nguyên tố.

**Bài 12:***Cho * là số nguyên tố hay hợp số? vì sao?(trích đề thi HSG Nam Trực)

***Lời giải:***

**

**

**

Mà 

Nên **là hợp số

**Bài 13:** Cho  là số nguyên tố. Hỏi là số nguyên tố hay hợp số? (trích đề thi HSG Bá Thước)

***Lời giải:***

Ta có  là số nguyên tố suy ra  chia  dư 

chia  dư 

chia hết cho 

Vậy  là hợp số

**Bài 14:** Tìm số tự nhiên  sao cho là số nguyên tố. (Trích đề thi HSG Hiệp Hòa)

***Lời giải:***

Vì  nên  và Ư

Vì là số nguyên tố nên hoặc 

+ Nếu  thì (thỏa)

+ Nếu 

thì không phải là số nguyên tố, loại

Vậy thì là số nguyên tố.

**Bài 15:** Tìm các số tự nhiên  để là số nguyên tố. (trích đề thi HSG Hưng Hà).

***Lời giải:***

Với  ta có  là số nguyên tố.

Với  ta có  nên mà  do đó là hợp số

Vậy thì là số nguyên tố.

🙢 **HẾT** 🙠