**CHUYÊN ĐỀ 3: PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIACÓ DƯ**

**CHỦ ĐỀ 3: DÙNG TÍNH CHẤT CHỨNG MINH BÀI TOÁN CHIA HẾT**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. TÍNH CHẤT CHUNG**

1)  và  thì 

2)  với mọi  khác 0

3)  với mọi  khác 0

4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

**2. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA TỔNG, HIỆU**

- Nếu  cùng chia hết cho m thì chia hết cho  và  chia hết cho 

- Tổng (Hiệu) của 2 số chia hết cho  và 1 trong 2 số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho .

- Nếu 1 trong 2 số  chia hết cho  số kia không chia hết cho  thì tổng, hiệu của chúng không chia hết cho .

**3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA 1 TÍCH**

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho  thì tích chia hết cho 

- Nếu  chia hết cho  thi bội của a cũng chia hết cho 

- Nếu  chia hết cho ,  chia hết cho n thì chia hết cho 

- Nếu  chia hết cho  thì: 

**4. CÁC TÍNH CHẤT KHÁC:**

1) 

2)  

3) 

4) 

5) 

6) 

7) 

8) 

9)  (p là số nguyên tố) thì hoặc hoặc 

**5. CÁC TÍNH CHẤT SUY LUẬN ĐƯỢC**

- Trong hai số tự nhiên liên tiếp có một số chẵn và một số lẻ.

- Tổng hai số tự nhiên liên tiếp là một số lẻ.

- Tích hai số tự nhiên liên tiếp là một số chẵn.

- Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

- Tổng của hai số tự nhiên bất kỳ là một số lẻ thì có một số tự nhiên là số chẵn.

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**1, Dạng 1: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một số.**

**2, Dạng 2: Cho một biểu thức chia hết cho**  **chứng minh một biểu thức khác chia hết cho** **.**

**3, Dạng 3: Tìm**  **để biểu thức** **chia hết cho biểu thức** 

**4, Dạng 4: Bài toán chứng minh chia hết liên quan đến số chính phương.**

**5, Dạng 5: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một biểu thức.**

**6, Dạng 6: Chứng minh chia hết từ một đẳng thức cho trước.**

**Dạng 1: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một số**

***I. Phương pháp giải:*** Chứng minh biểu thức  chia hết cho số .

- Viết biểu thức  thành một tổng(hiệu) các số trong đó mỗi số đều chia hết cho  từ đó suy ra  chia hết cho .

- Viết biểu thức  thành một tích các thừa số trong đó có thừa số chia hết cho  từ đó suy ra  chia hết cho .

- Viết m thành một tích các thừa số nguyên tố cùng nhau và chỉ ra biểu thức  chia hết cho các thừa số của  từ đó suy ra  chia hết cho .

- Viết biểu thức  và  thành một tích các thừa số và chỉ ra mỗi thừa số của  chia hết cho một thừa số của m từ đó suy ra  chia hết cho .

- Viết  thành một tổng hoặc hiệu các số mà có tổng hoặc hiệu các số dư chia hết cho  từ đó suy ra  chia hết cho .

Cụ thể ta có thể vận dụng các PHƯƠNG PHÁP sau:

+ PHƯƠNG PHÁP 1: Nếu  là một số cụ thể ta vận dụng dấu hiệu chia hết 2; 3; 4; 8; 9; 11; ... để chứng minh.

+ PHƯƠNG PHÁP 2: Nếu  có tổng hoặc hiệu các số, ta cần phân tích  để đưa  về hoặc hiệu hoặc tích của các số có dấu hiệu chia hết rồi áp dụng tính chất chia hết của tổng (hiệu) hoặc tích để chứng minh.

+ PHƯƠNG PHÁP 3: Để chứng minh  chia hết cho , ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia  cho .

+ PHƯƠNG PHÁP 4: Ngoài ra ta cũng có thể dùng cách tìm chữ số tận cùng của  để chứng minh  chia hết cho một số.

+ PHƯƠNG PHÁP 5: Nếu  và  mà  và  là hai số nguyên tố cùng nhau thì 

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh rằng

a.  b. 

**Lời giải**

a) ***Cách 1:***

Ta có:  và 

Lại có  có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9. Vậy A chia hết cho 72

***Cách 2*:**

 có ba chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8



b) Ta có ; ;  chia hết cho 9 nên  chia hết cho 9

Lại có  có tận cùng là 1

 có tận cùng là 7

 có tận cùng là 9

nên có tận cùng là 5 nên  chia hết cho 5.

Mà 

**Bài 2:**  Chứng minh : chia hết cho 17.

**Lời giải**



 

**Bài 3:** Chứng minh rằng:  chia hết cho 19

**Lời giải**

Thêm bớt , ta được: 

Ta có: 





  (mod19)

Vậy 

***Ghi chú:*** *Đối với một số bài toán lớp 8 nếu ta sử dụng đến hằng đẳng thức:*với  với ( ; n lẻ). *Thì ta có thể giải được một cách dễ dàng, tuy nhiên với học sinh lớp 6 thì chưa thể sử dụng những hằng đẳng thức đó. Vì vậy, ta có thể sử dụng Đồng dư thức để có được lời giải phù hợp với trình độ của học sinh lớp 6.*

**Bài 4:** Chứng minh rằng: a)  chia hết cho 7.

b)  chia hết cho 7.

**Lời giải**

a) Ta có 

Mà 

Tương tự: 



Vậy chia hết cho 7.

b) 

Sử dụng tính chất: khi chia cho  có số dư là 

Ta có











**Bài 5 :** Chứng minh rằng:  chia hết cho 6

**Lời giải**

Ta có:

Tổng của hai số hạng : 

Tổng A có 200 số hạng ta chia thành 100 nhóm chứa hai số hạng có tổng 6.

Nên: 







Vậy  chia hết cho 6

**Bài 6 :** Chứng minh rằng: chia hết cho 4 và 5.

**Lời giải**











Vậy  chia hết cho 5 và 4.

**Bài 7 :** Chứng minh rằng:

a, 

b, 

c, 

**Lời giải**

a, Ta có:

Nếu  là số lẻ thì 

Nếu  là số chẵn thì 

Như vậy với mọi  là số tự nhiên thì : 

b, Ta có:  là tích ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3.

c, Ta có:  là 1 số lẻ nên  và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

**Bài 8:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì:

a. 

b. 

**Lời giải**

a) Ta có:  là số lẻ nên  chẵn hoặc  chẵn,

 (1)

Xét các trường hợp :







 với mọi số tự nhiên  (2)

Từ (1) và (2)  ( Do 2; 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)



b)  Vậy 

**Bài 9:** Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

**Lời giải**

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: 

Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là

 (Tính chất chia hết của một tổng).

***Nâng cao:*** Có phải tổng của n số tự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho n hay không?

**Bài 10**: Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 4 hay không ?

**Lời giải**

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là .

Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp là:



Do 4 chia hết cho 4 nên  chia hết cho 4 mà 6 không chia hết cho 4 nên  không chia hết cho 4  Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

***Kết luận nâng cao:*** Vậy không phải lúc nào tổng n số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho n

**Bài 11**: Chứng minh  chia hết cho 45 với mọi  là số tự nhiên.

**Lời giải**

Vì 495 chia hết cho 9 nên chia hết cho 9 với mọi .

Vì 1035 chia hết cho 9 nên chia hết cho 9 với mọi .

Nên: chia hết cho 9.

Chứng minh tương tự ta có:  chia hết cho 5 với mọi 

Mà   chia hết cho 45.

**Bài 12:** Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8.

**Lời giải**

Gọi hai số chẵn liên tiếp là 

Tích của hai số chẵn liên tiếp là: 

Vì  không cùng tính chẵn lẻ nên chia hết cho 2.

Mà 4 chia hết cho 4 nên chia hết cho (4.2)

 chia hết cho 8.

 chia hết cho 8.

**Bài 13**: Chứng minh rằng:

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

b) Tích của bốn số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 4.

**Lời giải**

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là 

Tích của ba số tự nhiên liên tiếp là: 

Một số tự nhiên khi chia cho 3 có thể nhận một trong các số dư 0; 1; 2.

+) Nếu  thì n chia hết cho 3  chia hết cho 3.

+) Nếu  thì  (k là số tự nhiên).

chia hết cho 3.

 chia hết cho 3.

+) Nếu thì  (k là số tự nhiên).

 chia hết cho 3.

 chia hết cho 3.

*Tóm lại:* chia hết cho 3 với mọi n là số tự nhiên.

b) Chứng minh tương tự ta có chia hết cho 4 với mọi n là số tự nhiên.

*Kết luận*: Tích của n số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho n.

**Dạng 2: Cho một biểu thức chia hết cho** **chứng minh một biểu thức khác chia hết cho** 

***I. Phương pháp giải***

- Vận dụng tính chất: từ đó tìm giá trị p và q thích hợp.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên thì:

a.  b. 

c.  d. 

***Lời giải***

a) *Gợi ý*: Tìm  sao cho 

Chọn 

*Trình bày bài:*

**Cách 1:**

\* Chứng minh: 

Từ 

Mà  nên 

\* Chứng minh: 

Từ 

(Vì 4 và 17 nguyên tố cùng nhau)

**Cách 2:**

\*Chứng minh: 

Vì (1)

Mà   (2)

Từ (1), (2) suy ra 

\* Chứng minh: 

Vì 

Mà   (Vì 4 và 17 nguyên tố cùng nhau)

b)  chọn 

c) 

d) 

**Bài 2:** Chứng minh rằng: Nếu thì 

***Lời giải***

Ta có : 

**Bài 3**: Chứng minh rằng:

a, Nếu  thì 

b, Nếu  thì 

***Lời giải***

a, Ta có: 

hay 

Khi đó  vì có 

b, Ta có: 

mà  nên 

**Bài 4**: Chứng minh rằng:

a, Nếu  thì 

b, Nếu  thì 

***Lời giải***

a, Ta có: 

b, Ta có: 



Mà nên 

**Bài 5**: Chứng minh rằng:

a, Nếu  thì 

b, Nếu  thì 

c, Nếu  thì 

***Lời giải***

a, Ta có :

b, Ta có :

c, Ta có :

**Bài 6**: Chứng minh rằng: Nếu  thì 

***Lời giải***

Ta có :



**Bài 7**: Chứng minh rằng:

a,  nếu  

b,  nếu  

***Lời giải***

a, Ta có:  và 

nên  

b, Ta có:  và 

nên  





**Bài 8**: Chứng minh rằng:

a, thì 

b,  thì 

***Lời giải***

a, Ta có:  

 

 

 

b, Ta có: 



 

**Bài 9:** Cho  là các số nguyên. CMR nếu chia hết cho 31 thì cũng chia hết cho 31

***Lời giải***

Ta có:   

**Bài 10:** Cho  là các số nguyên. CMR : 

***Lời giải***

Ta có: 

   

Ngược lại ta có: 

 

**Bài 11:** Cho  là các số nguyên. CMR nếu  thì và ngược lại.

***Lời giải***

Ta có:  

Ngược lại ta có: 

**Bài 12**: Cho  là các số nguyên. CMR nếu  thì 

điều ngược lại có đúng không?

***Lời giải***

Ta có:  

Điều ngược lại vẫn đúng

**Bài 13:** Cho  là các số nguyên và . Chứng minh rằng:

a,  b,  c, 

***Lời giải***

a, Ta có:  

b, Ta có: 

c, Ta có:  

**Bài 14:** Cho biết . CMR các biểu thức sau cũng chia hết cho 6

a, 

b, 

c, 

***Lời giải***

a, Ta có:  

b, Ta có:  

c, Ta có:  

**Dạng 3: Tìm**  **để biểu thức** **chia hết cho biểu thức** 

**Bài 1**: Tìm số tự nhiên  để chia hết cho 

***Lời giải***

Ta có 

Mà 

Do đó  là ước của 4.



Vậy với  thì 

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  để  là số tự nhiên .

***Lời giải***

Để  là số tự nhiên thì 

 

 Ư



Vậy với  thì  là số tự nhiên.

**Bài 3:** Tìm số tự nhiên  sao cho 

***Lời giải***

Ta có 

Để  thì 

Với 

Với 

Vậy 

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  để 

***Lời giải***



 

 Ư



**Bài 5:** Tìm để  là bội của 

***Lời giải***

Để  là bội của  thì là số nguyên****

 Ư

 (thỏa mãn )

**Bài 6:** Tìm số nguyên  để:  chia hết cho 

***Lời giải***

Ta có 

 khi 

Ư



**Bài 7:** Tím tất cả các số nguyên  để phân số  có giá trị là một số nguyên

***Lời giải***

là số nguyên khi 

Ta có 

Vậy  khi 

 Ư(3) 

 

**Bài 8:** Cho . Tìm  nguyên để  là một số nguyên.

***Lời giải***

 = 

Với n nguyên,  nhận giá trị nguyên   hay Ư

Lập luận tìm ra được 

**Bài 9:** Tìm số nguyên n để phân số  có giá trị là một số nguyên

***Lời giải***

Ta có: = 

Vì n nguyên nên để  nguyên thì  nguyên

  Ư

 

Vậy với  thì  có giá trị là một số nguyên

**Bài 10:** Tìm số tự nhiên  để biểu thức sau là số tự nhiên: 

***Lời giải***





Để  là số tự nhiên thì  là số tự nhiên

   Ư

Do  nên 

Vậy  thì  là số tự nhiên

**Dạng 3: Bài toán chứng minh chia hết liên quan đến số chính phương**

***I. Phương pháp giải***

- Kết hợp các tính chất chia hết với tính chất của số chính phương để giải bài tập.

- Tính chất của số chính phương :

Số chính phương chỉ có tận cùng là một trong các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9.

Khi phân tích ra TSNT thì số chính phương chỉ chứa TSNT với số mũ chẵn.

Một số chính phương chia hết cho số nguyên tố thì cũng chia hết cho 

Một số là số chính phương khi và chỉ khi có số ước lẻ.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì 

***Lời giải***

Nhận xét: Số chính phương chỉ có tận cùng là một trong các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 nên một số chính phương khi chia cho 5 có số dư là: 0, 1, 4. Ta xét các trường hợp sau :

Nếu  chia 5 dư 0 hay  thì (vì 5 là số nguyên tố) 

Nếu  chia 5 dư 1 thì 

Nếu  chia 5 dư 4 thì 

Vậy với mọi số tự nhiên n thì 

**Bài 2:** a) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

b) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

***Lời giải***

Gọi 

a) Xét:

 nên   
 nên chia cho 3 dư 1

 nên chia cho 3 dư 1.

Vậy: Một số chính phương chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1  
b) Xét:

nên   
 nên chia cho 4 dư 1

Vậy: Một số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.  
***Nhận xét:*** *Một số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, một số chính phương lẻ khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.*

**Bài 3:** Cho là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: 

***Lời giải***

Ta có 

Nhận xét: Nếu  lẻ thì 

Thật vậy:  mà và  là hai số chẵn liên tiếp nên 

Từ đó 

là các số chính phương nên chia 3 dư 1 hoặc 0

Vì a, b là các số chính phương lẻ liên tiếp nên luôn có một trong hai số không chia hết cho 3

Mà  đpcm.

**Bài 4**: Có hay không số tự nhiên  để  là số chính phương.

***Lời giải***

Giả sử là số chính phương thì 

Từ đó suy ra 





Như vậy trong 2 số  và  phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác và  có cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) và  là 2 số chẵn.

 và 

 nhưng 2010 không chia hết cho 4

 Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên  để  là số chính phương.

**Dạng 4: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một biểu thức**

***I. Phương pháp giải:***

- Biến đổi biểu thức bị chia thành tích của các biểu thức nhỏ trong đó có biểu thức chia hết cho biểu thức chia.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Cho . Chứng minh rằng chia hết cho 

***Lời giải***

Ta có 





Xét 



Vì  nên 

**Bài 2:** Cho Chứng minh rằng chia hết cho 

***Lời giải***

Ta có





Xét 

suy ra 

Vậy chia hết cho 

**Bài 3:** Tính tổng . Từ đó chứng minh  luôn chia hết chohai trong ba số 

***Lời giải***

Ta có 

****

****

****

****



Vì là ba số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, hai số còn lại là chia hết cho chính nó 

 là một số tự nhiên chia hết cho hai trong ba số 

**Bài 4:** Tính tổng . Từ đó chứng minh  luôn chia hết cho ba trong bốn số .

***Lời giải***

Ta có :

Xét 



 



Vì là bốn số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, ba số còn lại là chia hết cho chính nó 

 là một số tự nhiên chia hết cho ba trong bốn số 

**Bài 5:** Cho biểu thức .

a) Thu gọn biểu thức .

b) Chứng minh  luôn chia hết cho 3.

c) Chứng minh E luôn chia hết cho hai trong ba số 

***Lời giải***

a) Ta có :  (1)















Vậy  

b) Từ (1) suy ra  là số tự nhiên  là số tự nhiên (ĐPCM)

c) Ta có  (2)

Lại có là ba số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, nếu chia hết cho 3 thì  cũng chia hết cho 3. (3)

Từ (2); (3) suy ra trong 3 số  luôn có một số chia hết cho 3, hai số còn lại là chia hết cho chính nó.

Suy ra  là số tự nhiên luôn chia hết cho hai trong ba số  (ĐPCM)

**Bài 6:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì:

a.  (tích 2n số nguyên dương đầu)

b.  (tích 3n số nguyên dương đầu)

***Lời giải***

a) Xét biểu thức: 







Vậy  (ĐPCM)

b) Xét biểu thức: 







Vậy  (ĐPCM)

**Bài 7:** Chứng minh rằng:  chia hết cho 

***Lời giải***

Ta có: 

Để chứng minh  chia hết cho  ta chứng minh  chia hết cho 50 và 101

Ta có: 

Với n lẻ ta có: 

Suy ra mỗi tổng trong ngoặc của  chia hết cho 101 nên  (1)

Lại có: 



Tương tự ta có mỗi tổng trong ngoặc của  chia hết cho 50 nên  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  chia hết cho 101.50 nên  chi hết cho 

**Bài 8:** Cho số tự nhiên  , Chứng minh rằng: 

***Lời giải***

Đặt: 

Mặt khác, với n lẻ ta có: 

Nên 

Cũng có 

Mà 

**Dạng 5: Chứng minh chia hết từ một đẳng thức cho trước:**

***I. Phương pháp giải:***

Cách 1: Từ đẳng thức đã cho biến đổi, lập luận để làm xuất hiện số bị chia, số chia. Từ đó dựa vào các tính chất chia hết lập luận suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Biến đổi số bị chia làm xuất hiện vế trái hoặc vế phải của đẳng thức, thay số và lập luận suy ra điều phải chứng minh.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Chứng minh rằng:

a) Nếu  thì 

b) Nếu  thì 

***Lời giải***

a) Ta có: 

b) Ta có: 

**Bài 2:** Cho số tự nhiên  bằng 3 lần tích các chữ số của nó.

a) Chứng minh rằng: 

b) Đặt  Chứng minh rằng 

c) Tìm số tự nhiên 

***Lời giải***

a) Theo bài ra có  (1)



 (ĐPCM)

b) Thay  vào (1) ta được 

 (2)



 (ĐPCM)

c) Từ (2)  mà  

Thay các giá trị của k vào (2) ta có các trường hợp:

+)  (loại)

+) 

+) 

Vậy tìm được 2 số tự nhiên  thỏa mãn đề bài là 24; 15

**Bài 3:** Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn: , chứng minh rằng:

a. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 2

b. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 3

c. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 4

***Lời giải***

**Chứng minh bài toán phụ:** Một số chính phương khi chia cho 3; 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

*(Bài 2, dạng 3, chủ đề này)*

a. Giả sử cả a, b đều không chia hết cho 2 chia 4 dư 1

chia 4 dư 2 chia 4 dư 2 (mâu thuẫn vì cũng là số chính phương)

 Điều giả sử là sai  Trong hai số a, b có ít nhất một số chẵn.

Vậy trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 2.

b. Giả sử a, b đều không chia hết cho 3 chia 3 dư 1

chia 3 dư 2 chia 3 dư 2 (mâu thuẫn vì cũng là số chính phương)

 Điều giả sử là sai  Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 3

c. Giả sử a, b đều không chia hết cho 4 chia 4 dư 1

chia 4 dư 2 chia 4 dư 2 (mâu thuẫn vì cũng là số chính phương)

 Điều giả sử là sai  Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 4.

**Bài 4:** Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn: , chứng minh rằng: 

***Lời giải***

Ta có: 

+) Nếu a, b, c đều không chia hết cho 3 chia cho 3 dư 1

chia cho 3 dư 2 ,

Do đó trong 3 số  phải có ít nhất 1 số chia hết cho 3. Vậy  (1)

+) Nếu a, b, c đều không chia hết cho 5

chia 5 dư 1 hoặc 4 (vì SCP chỉ có tận cùng là 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9

chia 5 dư 2 hoặc 3 

Do đó trong 3 số  phải có ít nhất 1 số chia hết cho 5. Vậy  (2)

+) Nếu a, b, c đều là các số không chia hết cho 4  chia 4 dư 1

chia 4 dư 2 

Do đó trong 3 số  phải có ít nhất 1 số chia hết cho 4. Vậy  (3)

Ta thấy 3; 4; 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1),(2),(3) 

 (ĐPCM)

**Bài 5:** Cho , chứng minh rằng 

**Lời giải**

Tách 



Quy đồng A với mẫu chung là tích của các mẫu ta thấy rằng  có chứa 17.13.11

Gọi là các thừa số phụ tương ứng ta có  trong đó  không chứa 11 ;  không chứa 13 ;  không chứa 17 nên  không chia hết cho 11; 13; 17 suy ra luôn chứa 17.13.11 khi  ở dạng tối giản 

Vậy  (ĐPCM)

**PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.**

**Bài 1:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  thì  chia hết cho 10.

***Lời giải***

Ta có : 

 chia hết cho 10.

Vậy với mọi số nguyên dương  thì  chia hết cho 10.

**Bài 2:** Tìm số nguyên  sao cho  có giá trị là số nguyên.

***Lời giải***

Ta có  có giá trị là số nguyên khi  mà 



Vậy với  thì  có giá trị là số nguyên

**Bài 3:** Cho . Chứng minh rằng: ****

***Lời giải***

Ta có .

Vậy 

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  thỏa mãn 

***Lời giải***

Ta có 





Vì nên 

Vậy với  thì 

**Bài 5:** Chứng minh rằng nếu  là một số lẻ không chia hết cho 3 thì 

***Lời giải***

Vì  là một số lẻ nên  cũng là một số lẻ, suy ra  (1)

Vì  là một số không chia hết cho 3 nên  có dạng  hoặc 

+ Nếu  (2)

+ Nếu  (3)

Từ (1), (2), (3) và , suy ra 

**Bài 6:** Cho . Tính  và tìm số dư khi chia  cho 4.

***Lời giải***

Ta có 





Vì  mà  là số nguyên 

chia cho 4 dư 1.

Vậy 3100 chia cho 4 dư 1.

**Bài 7:** Cho ****

a) Chứng tỏ chia hết cho 4.

b) Tìm số dư trong phép chia cho 13

***Lời giải***

a) ****

****

****

****

****

Vậy chia hết cho 4

b) Ta có 

Tổng  có 100 số hạng ta nhóm 3 số thành một nhóm ta được 33 nhóm và thừa ra một số:

****

****

****

****

Vì chia hết cho 13 nên **** chia cho 13 dư 3

Vậy số dư trong phép chiacho 13 là 3

**Bài 8:** Chứng minh rằng tổng  chia hết cho .

***Lời giải***

Ta có: 









**Bài 9:** Chứng minh rằng: chia hết cho.

***Lời giải***

Ta có: 





Hay 

**Bài 10:** Cho . Tìm số dư khi chia B cho 7.

***Lời giải***

Ta có: 









Vì  chia hết cho 7; 2 chia 7 dư 2

nên  chia 7 dư 2 hay  chia cho 7 dư 2

**Bài 11:** Cho . Chứng tỏ chia hết cho 5.

***Lời giải***

Ta có: 

 (100 số hạng nhóm thành 50 tổng nhỏ )





Do nguyên dương suy ra chia hết cho 5

**Bài 12:** Cho . Chứng minh rằng chia hết cho 5

***Lời giải***

Ta có 

Lại có 

Suy ra 

Vậy chia hết cho 5.