**ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 2+ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN**

**CHỦ ĐỀ 6: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐỂ TÌM THÀNH PHẦN CHƯA BIẾT CỦA LŨY THỪA**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. KHÁI NIỆM:**

Luỹ thừa với số mũ tự nhiên:  ( thừa số  với ).

**2. QUI ƯỚC:**  và 

: Bình phương của 

: Lập phương của  

**3. CÁC PHÉP TÍNH LŨY THỪA:**

+ Nhân hai luỹ thưa cùng cơ số: 

+ Chia hai luỹ thừa cùng cơ số: 

+ Luỹ thừa của một thương: 

+ Luỹ thừa của luỹ thừa: 

+ Luỹ thừa tầng: 

+ Luỹ thừa với số mũ âm: 

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**

**I. Phương pháp giải**

Nội dung bài toán: Tìm  để , ta đi đánh giá như sau

+ Nếu 

+ Nếu 

+ Nếu 

Kết luận:  là giá trị cần tìm.

**II. Bài toán**

**Bài 1:** Tìm các số nguyên n thỏa mãn 

**Phân tích:** số cần tìm đóng vai trò cơ số, phần số mũ đã biết ta cần phân tích về lũy thừa có cùng số mũ để có thể so sánh được phần cơ số với nhau.

Ta có: Hai lũy thừa đầu có số mũ là cùng chia hết cho . Hai lũy thừa sau có số mũ cùng chia hết cho 

**Lời giải**

Với , ta có: 







Mặt khác, với , ta có: 







Từ (1); (2) , mà 

Vậynhận các giá trị nguyên là: 

**Bài 2:** Tìm số nguyên dương biết rằng:

a) 

b) 

**Phân tích:** số cần tìm đóng vai trò số mũ trong lũy thừa, phần cơ số đã biết ta cần phân tích về lũy thừa có cùng cơ số để có thể so sánh được phần số mũ với nhau.

**Lời giải**

a) Ta có: 





mà 

b) Ta có: 





mà 

**Bài 3:** Tìm số tự nhiên n, biết rằng:

a) 

b) 

**Phân tích:** Nhận xét tương tự bài 1 và bài 2.

Câu a phân tích đưa về lũy thừa có cùng cơ số để so sánh số mũ.

Câu b phân tích đưa về lũy thừa có cùng số mũ để so sánh cơ số.

**Lời giải**

a) Với  ta có:

 

 

Từ và  , mà 

Vậy 

b) Với , ta có: 

Vì  nên  

Với , ta có: 

Vì  nên  

Từ  và , suy ra , mà 

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  thỏa mãn

a) 

b) 

**Phân tích:** Các lũy thừa có cùng cơ số, nên học sinh hướng tới nghĩ đến đưa về cùng cơ số để nhóm, rút gọn đơn giản phép tính. Dễ dàng thực hiện được câu a. Hưỡng dấn cách đánh giá để có cách khác tìm .

Câu b làm theo cách 1 thì sẽ gặp phải vấn đề xuất hiện bình phương trong phép tính khó thu gọn ở câu 4. Hướng dẫn cách nhẩm nghiệm và đánh giá so sánh để làm được theo cách 2 ở câu a.

**Lời giải**

a) 

Cách 1.











Vậy  là giá trị cần tìm.

Cách 2.

Theo đề,  số tự nhiên 

+ TH1: 

Ta có: 









 không thỏa mãn

+ TH2:  (thỏa mãn)

Vậy  là giá trị cần tìm.

b) 

Ta có:

+ Nếu  (thỏa mãn)

+ Nếu  (không thỏa mãn)

+ Nếu  (không thỏa mãn)

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên  thỏa mãn

a) 

b) 

c) 

**Phân tích:** Câu a các lũy thừa không cùng cơ số nên không thu gọn biến đôi được biểu thức vế trái. Nhận thấy tổng các cơ số  nên  là một giá trị thỏa mãn. Đánh giá với các giá trị  (vì theo đề bài nên loại) và 

Câu b và c số cần tìm xuất hiện ở số mũ trong lũy thừa và cả ở biểu thức, ta thay các giá trị lần lượt từ và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

**Lời giải**

a) 

Ta có:

+ Nếu  thì  (loại)

+ Nếu  thì  (thỏa mãn)

+ Nếu  thì  (loại)

Vậy  là giá trị cần tìm.

b) 

Ta có:

+ Nếu  thì  (thỏa mãn)

+ Nếu  thì  (loại)

+ Nếu  thì  (loại)

Vậy  là giá trị cần tìm.

c) 

Ta có: 

+ TH1: 

mà 



 (không thỏa mãn)

+ TH2: 

mà 

 (loại)

Vậy không tồn tại giá trị của thỏa mãn yêu cầu đề bài

**Bài 6:** Tìm số tự nhiên  biết  

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị  lần lượt từ  và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

**Lời giải**

+ TH1: 







 không thỏa mãn

+ TH2: 







 không thỏa mãn

+ TH3: 







 thỏa mãn

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 7:** Tìm  biết  và  

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta nhận thấy . Chia các trường hợp của  để tìm .

**Lời giải**

Cách 1:

Ta có: 





.

Vì  nên ta xét trường hợp sau:

TH1: , thay vào (1) ta được:  (loại)

TH2: , thay vào (1) ta được:  (loại)

TH3:  thay vào (1) ta được:  (loại)

TH4:  thay vào (1) ta được 

Ta có  và 

+ Nếu  thay vào (2) ta được  (thỏa mãn)

+ Nếu  thay vào (2) ta không tìm được giá trị của x thỏa mãn.

Vậy 

Cách 2:

Ta có: 

+ Nếu  thay vào (1) ta được:   loại trường hợp 

+ Nếu , thay vào (1) ta được: 

+ Nếu  (loại)



Vậy 

**Bài 8:** Tìm  thỏa mãn  và 

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thấy 

Chia các trường hợp của  để tìm 

**Lời giải**

Với , mà  , nên ta có:









TH1: 

Với , từ  ta có  

Ta có vế trái của (2) không chia hết cho 3 và vế phải của (2) chia hết cho 3 nên loại

TH2: 

Với , từ  ta có 

Ta có 

+ Nếu  thay vào ta được  (thỏa mãn)

+ Nếu  thay vào ta được  (loại)

Vậy 

**Bài 9\*­­:** Tìm  thỏa mãn 

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số giống nhau, vai trò của x, y, z sẽ như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử  từ đó đánh giá được . Tiếp tục để đánh giá lần lượt được và  ta biến đổi phân tích đặt ra ngoài làm thừa số chung để đánh giá được  và .

Nhận xét nếu  vô lí nên ta có được , thay vào biểu thức nhận xét và tìm được giá trị của 

Từ đó tìm được  và 

**Lời giải**

Vì  có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử 

Ta có: 

Mà 



Lại có: 







Mà  



+ Nếu 

Ta có VT(\*) là số lẻ và VP(\*) là số chẵn  loại trường hợp ,

do vậy , thay vào (\*) ta được:



+ Nếu  còn  là số chẵn nên loại



Do đó 



+ Nếu  là số lẻ và  là số chẵn  loại 

Từ (\*\*\*) 

Vậy 

**Bài 10:** Tìm các số nguyên dương  sao cho 

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị lần lượt từ và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được đánh giá. Để dễ dàng đánh giá thì ta biến đổi một vế không chứa  bằng cách chia cả hai vế cho.

**Lời giải**

Ta có 

+ Với , ta có: 

 không thỏa mãn;

+ Với , ta có: 

 thỏa mãn;

+ Với , mà các cơ số < <1





 không thỏa mãn;

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 11:** Tìm các số nguyên dương x, y sao cho 

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau đều chứa số cần tìm, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị  lần lượt từ  và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được đánh giá.

**Lời giải**

+ Nếu không có giá trị nguyên nào của  thỏa mãn

+ Nếu  (thỏa mãn)

+ Nếu  thì  chia hết cho 9, mà 317 chia cho 9 dư 2 và  nên  chia 9 dư 2

Điều này mẫu thuẫn vì  chia 9 dư 0 hoặc 4

Vậy  thỏa mãn bài toán

**Bài 12:** Tìm , biết

a) 

b) 

**Phân tích:**

Câu a các lũy thừa có cơ số khác nhau, nhưng đều đưa được về lũy thừa cơ số . Dùng công thức lũy thừa đưa về cùng cơ số để so sánh.

Câu b các lũy thừa có cùng một cơ số dùng phép biến đổi đưa về cùng lũy thừa số sau đó so sánh để tìm ra giá trị của .

**Lời giải**

a) Theo đề, ta có:









Mà 

b) Ta có: 









Mà  

**Bài 13:** Tìm các số nguyên dương và sao cho: 

**Phân tích:** Các lũy thừa có cùng cơ số , nhận thấy nên .

Đặt  ra ngoài làm thừa số chung chia các trường hợp để nhận xét tính được .

**Lời giải**

Ta có:  

Dễ thấy  ta xét 2 trường hợp:

+ TH1: , từ  ta có: 

Do 



+ TH2:  là một số lẻ lớn hơn  nên vế trái của  chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố. Còn vế phải của  chỉ chứa thừa số nguyên tố 

 mâu thuẫn.

Vậy .

**Bài 14:** Tìm các số tự nhiên , biết : 

**Phân tích:** Các lũy thừa của có cùng cơ số , dề dàng tìm được .

Không biến đổi được về cơ số 5, ta so sánh được .

Theo tính chất bắc cầu ta có: 

Từ đó tìm được các số tự nhiên 

**Lời giải**

Ta có: 







Vì  là các số tự nhiên 

**Bài 15**: Tìm số tự nhiên  sao cho: 

**Phân tích: ** là số tự nhiên có 3 chữ số nên 

Từ đó ta có bẳng giá trị chia cá trường hợp và tìm được số tự nhiên a,b.

**Lời giải**

Vì là số tự nhiên có ba chữ số nên 





Ta có bảng:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |
|  | / | / | 3 | / | / |
|  | / | / | 4 | / | / |

Vậy .

**Bài 16**: Tìm số tự nhiên  sao cho: 

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị  lần lượt từ và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

**Lời giải**

+ Với , ta có: 







(thỏa mãn)

+ Với , ta có: 



Vì x là số tự nhiên nên không có giá trị của x thỏa mãn 

 không thỏa mãn

+ Với , ta có: , nên không có giá trị thỏa khi .

Vậy .

**Bài 17**: Tìm  sao cho: 

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị x, y lần lượt từ 1,2,3,4… và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

**Lời giải**

+ Với thì 

+ Với , ta có  là số chẵn,  là số lẻ với mọi  : vô lí

Vậy 

**Bài 18:** Chứng minh rằng: 

**Phân tích:** Nhận thấy mẫu đều là các số chẵn chia hết cho ,khi bình phương lên xuất hiện ,ta biến đổi đặt được  ra ngoài làm thừa số chung. Để  thì biểu thức còn lại so sánh .

Bằng tính chất của phân số, ta so sánh biểu thức còn lại với  và chứng minh được 

**Lời giải**

Ta có: 







Mà 

Suy ra 





Vậy 

**PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.**

**Bài 1:** Tìm các số tự nhiên  , sao cho 

(Trích đề thi Olympic lớp 6 huyện Thanh Oai năm học 2017 – 2018)

**Lời giải**

+ Với , ta có: 





(thỏa mãn)

+ Với , ta có: 



Vì x là số tự nhiên nên không có giá trị của x thỏa mãn  không thỏa mãn

+ Với , ta có: , nên không có giá trị thỏa khi .

**Bài 2:** Tìm  , sao cho 

(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2016 – 2017)

**Lời giải**

+ Với , ta có: 



 (thỏa mãn )

+ Với mọi  , , ta có: vế trái là số chẵn, vế phải  là số lẻ vô lí

Vậy 

**Bài 3:** Tìm các số tự nhiên  thỏa mãn 

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Thạch Thành năm học 2018 – 2019)

**Lời giải**

Ta có:  

Vì là số lẻ nên  là lẻ  cùng là số lẻ 

+ Với , từ 



 

Vì  chia 3 dư 1 và  nên

Từ 

 (thỏa mãn)

+ Với chẵn, mà từ  ta có  là số lẻ

 là số lẻ  là số chẵn

Vì  là số chẵn nên  cũng là số chẵn, trái với (2) vô lí với giả thiết



Vậy 

**Bài 4:** Tìm các số tự nhiên  thỏa mãn  

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Nguyễn Khuyến năm học 2018 – 2019)

**Lời giải**

+ Với , từ suy ra 





 (thỏa mãn)

+ Với , ta có vế trái  luôn là số chẵn, mà vế phải luôn là số lẻ với mọi , , điều này vô lí.

Vậy 

**Bài 5:** Tìm  thỏa mãn  

(Trích đề thi HSG lớp 6)

**Lời giải**

+ Với , từ suy ra 



 mà 

 (thỏa mãn)

+ Với , ta có  có chữ số tận cùng là 0

 Vế trái là  có chữ số tận cùng là 8

Mà Vế phải  là số chính phương nên không chữ số tận cùng không thể là 8

điều này vô lí.

Vậy 

**Bài 6:** Tìm các số nguyên  sao cho: 

**Phân tích:**

Nhận thấy bình phương của mọi số nguyên đều không âm nên ta có được 

Từ đó tìm được các số nguyên x, y, z.

**Lời giải**

Với mọi số nguyên  ta luôn có: 

Ta có:





**Bài 7:** Tìm các số nguyên  sao cho 

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Quang Trung năm học 2008-2009)

**Lời giải**

Với mọi giá trị của  ta có:  . Nên:

 

Mà  nên để  thì  hay 

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 8:** Tìm các số nguyên dương  sao cho 

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Du năm học 2007-2008)

**Lời giải**

Ta có 

+ Với , ta có: 

 không thỏa mãn;

+ Với , ta có: 

 thỏa mãn;

+ Với , mà các cơ số < <1

 

 không thỏa mãn;

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 9:** Tìm các số nguyên dương  sao cho 

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nam Trực năm học 2005-2006)

**Lời giải**

Ta có 

+ Với , ta có: 

thỏa mãn;

+ Với , mà các cơ số < <1

 

 không thỏa mãn;

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 10:** Tìm các số nguyên  sao cho: 

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sóc Sơn năm học 2014-2015)

**Lời giải**

Với mọi số nguyên  ta luôn có: 

Ta có: 



**Bài 11:** Tìm số nguyên dương  sao cho 

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Quang Trung năm học 2011-2012)

**Lời giải**

Ta có:

+ Nếu  thì  (thỏa mãn)

+ Nếu  thì   (loại)

+ Nếu  thì   (loại)

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 12:** Tìm các số nguyên dương  và  sao cho: 

(Trích đề thi HSG lớp 6)

**Lời giải**

Ta có:  (1)

Dễ thấy  ta xét 2 trường hợp:

+ TH1: , từ (1) ta có: 

Do 



+ TH2:  là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố. Còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2  mâu thuẫn.

Vậy .

🙢 **HẾT** 🙠