|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **QUẢNG NAM** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH**  **Năm học 2017 – 2018** |
| **ĐỀ CHÍNH THỨC** | Môn thi : **TOÁN**  Thời gian: **150 phút** (*không kể thời gian giao đề*)  Ngày thi : **17/4/ 2018** |

**Câu 1.** *(5,0 điểm)*

a) Cho biểu thức  với .

Rút gọn biểu thức A. Tìm các số nguyên  để  là số nguyên.

b) Cho ba số thực  sao cho 

Chứng minh .

**Câu 2.** *(4,0 điểm)*

a) Cho phương trình . Tìm  để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

b) Giải phương trình .

**Câu 3.** *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì  không thể là lập phương của một số tự nhiên.

b) Cho số nguyên tố và hai số nguyên dương , sao cho . Chứng minh  chia hết cho 12 và  là số chính phương.

**Câu 4.** *(3,5 điểm)*

Cho hình vuông  có cạnh bằng  cm.  là điểm nằm trên cạnh 

( khác  và ). Đường thẳng qua , vuông góc với đường thẳng  tại  và cắt đường thẳng  tại  Gọi  là giao điểm của  và .

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp trong đường tròn và ba điểm  thẳng hàng.

b) Khi  là trung điểm cạnh, tính diện tích tứ giác.

**Câu 5.** *(3,5 điểm)*

Cho hai đường tròn  cắt nhau tại hai điểm. Tiếp tuyến tại  của   cắt  tại khác). Tiếp tuyến tại  của  cắt  tại điểm (khác). Đường thẳng  cắt  tại  khác). Đường thẳng  cắt  tại  khác ).

a) Chứng minh các tam giác  đồng dạng.

b) Chứng minh 

**------------------------------------** *Hết* **--------------------------------**

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

*Họ và tên thí sinh: …..…………………………………………. Số báo danh: ……………*

***Thí sinh được phép sử dụng máy tính cầm tay.***

|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **QUẢNG NAM** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH**  **NĂM HỌC 2017 – 2018** |

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

**Môn: TOÁN**

*(Hướng dẫn chấm thi này có 06 trang)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Đáp án** | **Điểm** |
| **Câu 1**  **(5,0 đ)** | *Cho biểu thức  với .*  *Rút gọn biểu thức A; tìm số nguyên  để là số nguyên.* | **3,0** |
|  | 0,5  0,5 |
| (vì  nên ) | 0,5 |
|  | 0,5 |
|  | 0,5 |
| Ta có :  ⇒ 0 <A ≤ 1.  + Để A là số nguyên ( khi đó A =1) thì  hay | 0,5 |
| *Chú ý: Các học sinh có thể đặt t =  ( 0 ≤ t <2) – thực hiện các biến đổi đại số. Các thầy cô cho điểm thích hợp theo cách cho điểm từng phần trên đây.* |  |
| *b) Cho ba số thực  sao cho*  *Chứng minh . (1)* | **2,0** |
| Vì a,b,c có vai trò như nhau và nên giả sử 2 ≥ a ≥b ≥ c ≥ 1  Khi đó: (b−a)(b−c) ≤ 0 | 0,25 |
| ⇒ b2 +ac ≤ ab+bc (\*) ⇒ ( chia 2 vế (\*) cho bc)  và  ( chia 2 vế (\*) cho ab) | 0,25  0,25 |
| ⇒ | 0,25 |
| Để chứng minh (1) ta tiếp tục chứng minh  ≤ 7 ⇔ (2) | 0,25 |
| Ta có: 2 ≥ a ≥ c ≥ 1 ⇒ | 0,25 |
|  | (2) ⇔ x+ ≤  ⇔ 2x2−5x+2 ≤ 0 ⇔ (x−2)(2x−1) ≤ 0 ( đúng vì  (2) được chứng minh ⇒ (1) được chứng minh.  Dấu “=”xảy ra khi a=2, b=c=1 hoặc a=b=2, c=1 và các hoán vị của nó. | 0,25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 2**  **(4,0 đ)** | *a) Cho phương trình . Tìm để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.* | **2,0** |
| **Cách 1:**  • Điều kiện pt có 2 nghiệm phân biêt là Δ’ >0 ⇒ 2m−2 >0 ⇒ m>1. | 0,25 |
| • Ta có :  ⇒ | 0,25 |
| ⇒ | 0,5 |
| ⇒  ⇒ | 0,5 |
| ⇒ ⇒  - chọn | 0,5 |
| **Cách 2:**  Điều kiện : Δ’ >0 ⇒ 2m−2 >0 ⇒ m >1. | 0,25 |
| • Ta có :  Để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại thì | 0,5 |
|  | 0,5 |
|  | 0,25 |
| +  +( thỏa mãn ) | 0, 5 |
| **Cách 3 :**  • Điều kiện : Δ’ >0 ⇒ 2m−2 >0 ⇒ m>1. | 0,25 |
| Phương trình có 2 nghiệm là | 0,25 |
| Để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại thì  ( không xảy ra trường hợp ngược lại  vì  (!) ) | 0,25  0,25 |
| ⇒  ⇒ | 0,5 |
| ⇒ - Chọn | 0, 5 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *b) Giải phương trình  (1)* | **2,0** |
| **Cách 1:**  Điều kiện : | 0,25 |
| (1) ⇔  = 3−x (2) |  |
| Đặt  (⇒ a,b ≥ 0) | 0,25 |
| .(2) viết lại: | 0,5 |
| ⇒ ⇒  ( do 2+b>0 ) | 0,25 |
| ⇒  ⇒ x = 0 ( Cô si – hoặc bình phương...)  x = 0 thỏa điều kiện ⇒ x = 0 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. | 0, 25 0, 25 |
| **Cách 2:**  Điều kiện : | 0,25 |
|  | 0,5 |
|  | 0,5 |
|  | 0,25 |
| (\*) ⇔  ⇔  Kết luận: x=0 là nghiệm duy nhất. | 0, 5 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 3**  **(4,0 đ)** | *a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 1 thì (n+2)(n+1)(n+8) không thể là lập phương của một số tự nhiên.* | **2,0** |
| Ta có: (n+2)3< (n+2)(n+1)(n+8) < (n+4)3 (\*)  ⇔ n3+ 6n2+12n+8 < (n2+3n+2) (n+8) = n3+ 11n2 + 26n +16 < n3+ 12n2+48n+64  ( đúng với mọi n ≥ 1) | 0,5 |
| Giả sử có n∈N, n ≥ 1 sao cho (n+2)(n+1)(n+8) là lập phương của một số tự nhiên. Từ (\*) suy ra: (n+2)(n+1)(n+8) =( n+3)3 | 0,25  0,5 |
| ⇒ n3+ 11n2+26n+16 = n3+ 9n2+27n+27  ⇒ 2n2 − n −11 =0 ⇒  (!) | 0,5 |
| Vậy ∀n ≥ 1, n ∈ N thì (n+2)(n+1)(n+8) không là lập phương của một số tự nhiên. | 0,25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *b) Cho số nguyên tố  và hai số nguyên dương a, b thỏa mãn phương trình . Chứng minh a chia hết cho 12 và  là số chính phương.* | **2,0** |
| Ta có: . | 0,25 |
| Các ước của *p*2 là 1, *p* và p2 .  Không xảy ra trường hợp *b* + *a* = *b* ‒ *a* = *p*  Do đó chỉ xảy ra trường hợp *b* + *a* = *p*2 và *b* ‒ *a* = 1.  Khi đó  suy ra 2*a* = (*p* ‒1)(*p* + 1). | 0,5 |
| Từ *p* lẻ suy ra *p* + 1, *p* ‒1 là hai số chẵn liên tiếp ⇒ (*p* ‒1)(*p* + 1) chia hết cho 8.  Suy ra 2*a* chia hết cho 8 (1) | 0,5 |
| Vì *p* là số nguyên tố lớn hơn 3 nên *p* không chia hết cho 3. Do đó *p* có dạng 3*k*+1 hoặc 3*k*+2.  Suy ra một trong hai số *p* + 1; *p* ‒1 chia hết cho 3 . Suy ra 2*a* chia hết cho 3 (2)  Từ (1) và (2) suy ra 2*a* chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm). | 0,5 |
| Xét  là số chính phương. | 0,25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 4**  **(3,5 đ)** | *Cho hình vuông  cạnh bằng 4 cm.  là điểm nằm trên cạnh  ( khác  và ). Một đường thẳng qua , vuông góc với đường thẳng  tại  và cắt đường thẳng  tại  Gọi  là giao điểm của  và .* |  |
| *a)Chứng minh tứ giác KDCE nội tiếp đường tròn và ba điểm  thẳng hàng.* | **2,5** |
| *(Không có hình vẽ không chấm bài)* |  |
| + Hai tam giác *BKA* và *BKC* bằng nhau ⇒ . | 0,5 |
| + Lại có *A*, *B*, *H*, *D* cùng nằm trên một đường tròn nên .  Suy ra  Do đó tứ giác *KDCE* nội tiếp trong đường tròn. | 0, 5  0,5 |
| + Trong tam giác *BDF* có *BC* và *DH* là hai đường cao. Suy ra  (1). | 0,2 5 |
| Tứ giác *KDCE* nội tiếp trong đường tròn và  nên  hay  (2).  Từ (1) và (2) suy ra *K*, *E*, *F* thẳng hàng. | 0,25  0,25 |
| *b) Khi  là trung điểm cạnh , tính diện tích tứ giác.* | **1,0** |
| Ta có Δ BKE vuông cân, BK= KE =  SBKE = | 0,25 |
| Xét ΔBHE ta có BH = BE. sinE = 2. sinE =  HE2 =BE2 −BH2 =  ⇒ HE =  SBHE = | 0.25  0.25 |
| SBKEH = SBKE +SBHE = (cm2) | 0.25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 5**  **(3,5 đ)** | *Cho hai đường tròn (C1 ),(C2 ) cắt nhau tại hai điểm A,B. Tiếp tuyến tại A của (C2 ) cắt (C1 ) tại M (M ≠ A). Tiếp tuyến tại A của (C1 ) cắt (C2 ) tại điểm N (N ≠ A). Tia MB cắt (C2 ) tại P ( P ≠ B). Tia NB cắt (C1 ) tại Q ( Q ≠ B).* |  |
| *a/ Chứng minh các tam giác AMP và ANQ đồng dạng.* | **0,75** |
| *(Không có hình vẽ không chấm bài)* |  |
| *Tứ giác ABNP nội tiếp ⇒* | 0,25 |
| *Tứ giác ABMQ nội tiếp ⇒* | 0,25 |
| *Suy ra: Δ ANQ đồng dạng Δ APM* | 0,25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *b/ Chứng minh:  (1).* | **2,75** |
| *AM là tiếp tuyến , MBP là cát tuyến của (C2) –chứng minh MA2 = MB.MP* | 0,5 |
| *Tương tự AN là tiếp tuyến , NBQ là cát tuyến của (C1), ta có: NA2 = NB.NQ* | 0,25 |
| ⇒  (2) | 0,25 |
| Từ (2), để có (1), ta chứng minh *MP =NQ .*  Để chứng minh *MP =NQ* ta chứng minh *Δ AMP = Δ AQN*  *( AMP và AQN đồng dạng , cần chứng minh A N = AP hay )* |  |
|  |  |
| + Ta có  ( chắn cung AB của (C2)) | 0,25 |
| + Ta có  ( chắn cung NB của (C2) )  ( chắn cung AB của (C1)) | 0,25 |
| + Suy ra  ⇒ ( Góc ngoài bằng tổng 2 góc trong không kề nó) | 0,25 |
| + Mặt khác  ( chắn cung AP của (C2))  Suy ra: . | 0,25 |
| Ta có:  ⇒ Δ *ANP cân tại N ⇒ AN= AP* | 0,25 |
| *Tam giác AMP và AQN đồng dạng kết hợp AN= AP*  *⇒ Δ AMP = Δ AQN ⇒ MP=NQ (2)*  Từ (1) (2) ⇒  hay . | 0,25  0,25 |
|  |  |

**Ghi chú:** Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì các thầy cô giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.