|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT**  **ĐỒNG ĐẬU** | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI 12 NĂM HỌC 2019 - 2020**  **MÔN: TOÁN** |
| *(Đề thi gồm 01 trang)* | *Thời gian: 180 phút, (không kể thời gian giao đề)* |

**Câu 1** *(2,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số  đồng biến trên .

b) Cho hàm số  có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng  cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA, OB bằng .

**Câu 2** *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình lượng giác sau  .

b) Giải hệ phương trình sau .

**Câu 3** *(2,0 điểm)* Cho hình lăng trụ đứng  có , ,  và góc . Gọi M là điểm trên cạnh  sao cho .

a) Chứng minh rằng .

b) Tính khoảng cách từ đỉnh  đến mặt phẳng .

**Câu 4** *(1,0 điểm)* Cho dãy số  có số hạng tổng quát .

Tính .

**Câu 5** *(1,0 điểm)* Cho đa giác lồi  có n đỉnh (). Biết số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của và không có cạnh nào là cạnh của  gấp 5 lần số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của  và có đúng một cạnh là cạnh của . Xác định n.

**Câu 6** *(1,0 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có phương trình đường chéo AC là , điểm  là trọng tâm tam giác ABC, điểm  thuộc đường cao kẻ từ D của tam giác ACD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành đã cho, biết rằng diện tích tứ giác AGCD bằng 32 và đỉnh A có tung độ dương.

**Câu 7** *(1,0 điểm)* Cho  và . Chứng minh bất đẳng thức:



HẾT

|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT**  **ĐỒNG ĐẬU** | **HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI 12**  **NĂM HỌC: 2019 - 2020**  **MÔN: TOÁN** |
|  | *Thời gian: 180 phút, (không kể thời gian giao đề)* |

**I. Những lưu ý chung:**

- Điểm toàn bài thi không làm tròn.

- Câu 3) học sinh không vẽ hình thì không cho điểm.

- Học sinh giải theo cách khác đáp án mà đúng vẫn cho điểm tối đa.

**II. Đáp án và thang điểm:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu** | **Đáp án** | | | **Điểm** |
| 1 | a)Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số  đồng biến trên . | | | 1 |
| Ycbt | | | 0,25 |
|  | | | 0,25 |
| Ta có: | | | 0,25 |
|  | | | 0,25 |
| b) Cho hàm số  có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng  cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA, OB bằng . | | | 1 |
| Phương trình hoành độ: | | | 0,25 |
| Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi . Khi đó, . | | | 0,25 |
| Điều kiện để OA, OB tạo với nhau một góc  là: | | | 0,25 |
|  | | | 0,25 |
| 2 | a) Giải phương trình lượng giác sau  . | | | 1 |
|  | ĐKXĐ:  . Phương trình đã cho biến đổi thành: | | | 0,25 |
|  | | | 0,25 |
|  | | | 0,25 |
| Vậy nghiệm của phương trình là: | | | 0,25 |
| b) Giải hệ phương trình sau . | | | 1 |
| ĐK:  . Biến đổi phương trình đầu về dạng: | | | 0,5 |
| Thay  vào phương trình thứ hai, ta được:  . Vế trái pt là hàm đồng biến trên  mà  là nghiệm nên nghiệm đó duy nhất. Suy ra:  (tm) | | | 0,25 |
| Vậy, nghiệm của hệ là: | | | 0,25 |
|  | | |  |
| 3 | Cho hình lăng trụ đứng  có , ,  và góc . Gọi M là điểm trên cạnh  sao cho .  a) Chứng minh rằng .  b) Tính khoảng cách từ đỉnh  đến mặt phẳng . | | | 2 |
|  |  | | a) Chứng minh rằng .  Từ giả thiết  suy ra:    Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC. | 0,5 |
| Sử dụng Pitago, dễ dàng tính được:  và . | 0,25 |
| Từ đó suy ra:  hay tam giác  vuông tại M. | 0,25 |
| b) Tính khoảng cách từ đỉnh  đến mặt phẳng . Đặt , gọi K là hình chiếu vuông góc của  lên  và H là hình chiếu vuông góc của  lên AK. Ta có | | | 0,25 |
| Do  theo tỉ số  nên dễ dàng suy ra:  và theo định lí cosin suy ra: | | | 0,25 |
|  | | | 0,25 |
| Trong tam giác vuông  ta có:  Vậy khoảng cách từ  đến mặt phẳng  bằng  . | | | 0,25 |
| 4 | Cho dãy số  có số hạng tổng quát .  Tính . | | | 1 |
|  | Ta có: | | | 0,25 |
| Suy ra: | | | 0,5 |
| Do đó, | | | 0,25 |
| 5 | Cho đa giác lồi  có n đỉnh (). Biết số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của và không có cạnh nào là cạnh của  gấp 5 lần số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của  và có đúng một cạnh là cạnh của . Xác định n. | | | 1 |
|  | Số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) là: | | | 0,25 |
| Số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng 2 cạnh là cạnh của (H) là: n | | | 0,25 |
| Số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng 1 cạnh là cạnh của (H) là: | | | 0,25 |
| Theo giả thiết, ta có:  Vậy đa giác (H) có 35 đỉnh. | | | 0,25 |
| 6 | Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có phương trình đường chéo AC là , điểm  là trọng tâm tam giác ABC, điểm  thuộc đường cao kẻ từ D của tam giác ACD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành đã cho, biết rằng diện tích tứ giác AGCD bằng 32 và đỉnh A có tung độ dương. | | | 1 |
|  |  | Vì  nên  .  Ta có, | | 0,25 |
| Vì D và G nằm khác phía so với AC nên | | | 0,25 |
| Vì . Từ gt  nên | | | 0,25 |
| Từ  . Vậy tọa độ 4 đỉnh của hình bình hành là: | | | 0,25 |
| 7 | Cho  và . Chứng minh bất đẳng thức: | | | 1 |
|  | Đưa bất đẳng thức về dạng: ­­  Ta chứng minh BĐT phụ: .  Thật vậy, ta có: BĐT phụ tương đương với:  luôn đúng, .  Dấu bằng xảy ra khi  . | | | 0,25 |
| Vì a, b, c là ba số dương có tổng bằng 3 nên: .  Áp dụng BĐT phụ cho 3 số a, b, c:  . | | | 0,25 |
| Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên , ta có:  (đpcm) | | | 0,25 |
| Dấu bằng xảy ra khi  . | | | 0,25 |

**HẾT**