|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TỈNH QUẢNG BÌNH**  **ĐỀ CHÍNH THỨC**  (*Đề thi có 01 trang và 05 câu*) | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NĂM 2019 - 2020**  **Môn thi: TOÁN**  **LỚP 12 THPT**  Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian phát đề)* |

**Câu 1 (*2,0 điểm*)**.

a. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số .

b. Cho hàm số  có đồ thị và điểm . Tìm các giá trị của m để đường thẳng  cắt đồ thị  tại hai điểm phân biệt  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 2 (*2,0 điểm*)**.

a. Cho hàm số . Tính tỉ số , với  và .

b. Giải phương trình: .

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 3 (*2,0 điểm*)**.  a. Cho tam giác đều *ABC* cạnh 8cm. Chia tam giác này thành 64 tam giác đều cạnh 1cm bởi các đường thẳng song song với các cạnh tam giác ABC (như hình vẽ). Gọi *S* là tập hợp các đỉnh của các tam giác cạnh 1cm. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh thuộc *S*. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của hình bình hành nằm trong miền trong của tam giác ABC và có cạnh chứa các cạnh của các tam giác cạnh 1 cm ở trên. |  |

b.Tìm công sai *d* của cấp số cộng  có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn:

.

**Câu 4 (*3,0 điểm*).** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh a, *SA* (*ABCD*), *SA* = *a*. Một mặt phẳng  qua *CD* cắt *SA, SB* lần lượt tại *M, N*. Đặt *AM* = *x*, với .

a. Tứ giác *MNCD* là hình gì? Tính diện tích tứ giác *MNCD* theo *a* và *x*.

b. Xác định *x* để thể tích khối chóp *S.MNCD* bằng  lần thể tích khối chóp *S.ABCD*.

**Câu 5 (*1,0 điểm*)**.

a. Cho các số thực phân biệt . Chứng minh rằng: .

b. Cho các số thực . Chứng minh rằng: .

**............ HẾT ............**

**HƯỚNG DẪN GIẢI (THAM KHẢO)**

**Câu 1a (*1,0 điểm*)**. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số .

**Hướng dẫn**

Đặt , khi đó .

Ta có .

Tính .

Suy ra: ; .

**Câu 1b (*1,0 điểm*)**. Cho hàm số  có đồ thị và điểm . Tìm các giá trị của m để đường thẳng  cắt đồ thị  tại hai điểm phân biệt  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Hướng dẫn**

**Cách 1**:

Dễ thấy đường thẳng  luôn đi qua điểm  là giao điểm của hai đường tiệm cận. Ta có  nên để đường thẳng  cắt  tại hai điểm phân biệt  thì . Khi đó  luôn là trung điểm của đoạn MN.

Ta có  (\*).

Do A cố định nên: *nếu ta xét được*  *là số dương* và *trong tam giác AMN có cạnh MN nhỏ nhất* thì *tìm được giá trị nhỏ nhất*. Mà  là Hypebol nên khi  là đường phân giác của góc tạo bởi hai tiệm cận thì  và  cắt tại hai điểm phân biệt  và MN nhỏ nhất, ta có: , hơn nữa . Vậy .

**Cách 2**:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của  cắt và : 

 (vì  không là nghiệm).

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì .

Theo định lý Viet ta có: .

Mặt khác 







.

**Câu 2a (*1,0 điểm*).** Cho hàm số . Tính tỉ số , với  và .

**Hướng dẫn**

.

Do đó  là hàm số chẵn, suy ra  là hàm số lẻ.

Vậy nếu  thì .

**Câu 2b (*1,0 điểm*).** Giải phương trình: .

**Hướng dẫn**

Đặt , từ phương trình đã cho ta có:

. Như thế ta có điều kiện  và ta được hệ phương trình: . Xét hàm , ta có:

, và  đồng biến nên ta có  là điểm cực tiểu của ,  nên phương trình  có đúng hai nghiệm .

Mặt khác từ hệ phương trình, trừ theo vế ta có:  hay là , với  đồng biến trên , suy ra .

Cuối cùng phương trình đã cho .

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 3a (1,0 điểm).**  Cho tam giác đều ABC cạnh 8cm. Chia tam giác này thành 64 tam giác đều cạnh 1cm bởi các đường thẳng song song với các cạnh tam giác ABC (như hình vẽ). Gọi S là tập hợp các đỉnh của các tam giác cạnh 1cm. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh thuộc S. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của hình bình hành nằm trong miền trong của tam giác ABC và có cạnh chứa các cạnh của các tam giác cạnh 1 cm ở trên. |  |

**Hướng dẫn**

Trên cạnh BC ta có 9 đỉnh của các tam giác đều cạnh 1cm (kể cả B và C), trên đường thẳng tiếp theo song song BC (phía trên BC) ta có 8 đỉnh của các tam giác đều cạnh 1cm, ... cuối cùng đến A có 1 đỉnh của tam giác đều cạnh 1cm. Ta có .

Như thế số phần tử của không gian mẫu là:.

Theo yêu cầu: nếu có hình bình hành tạo thành từ 4 đỉnh trong *S* thì 4 đỉnh đó chỉ có thể thuộc tam giác đều cạnh 5cm (tức là bỏ đi tất cả các đỉnh của các tam giác cạnh 1cm nằm trên ba cạnh BC, CA, AB và cạnh có liên quan đến các đỉnh đó).



• **Trường hợp 1**: Các cạnh của hình bình hành nằm trên MN hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc MN.

- Các hình bình hành có cạnh nằm trên MN và

+ Tạo bởi hai đoạn MN, DE: Ta cần chọn thêm 2 đường thẳng song song hoặc trùng với DM (hoặc song song trùng EN) thì tạo ra hình bình hành và mỗi trường hợp này có  cách. Như vậy có:  hình bình hành.

+ Tạo bởi hai đoạn MN, GF: Lặp lại lập luận trên ta có có:  hình.

+ Tạo bởi hai đoạn MN, HI: Lặp lại lập luận trên ta có có:  hình.

+ Tạo bởi hai đoạn MN, KT: Lặp lại lập luận trên ta có có:  hình.

Vậy các hình bình hành có cạnh nằm trên MN có 20 + 12 + 6 + 2 = 40 hình.

- Các hình bình hành có đúng 1 đỉnh thuộc MN

+ Đỉnh số 1 và số 4: đều có 4 hình bình hành

+ Đỉnh số 2 và số 3: đều có 3 hình bình hành.

Vậy các hình bình hành có đúng 1 đỉnh thuộc MN có 2.(4 + 3) = 14 hình.

Do đó trường hợp 1 ta có: 40 + 14 = 54 hình.

• **Trường hợp 2**: Các cạnh hình hành nằm trên DE nhưng không thuộc MN hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc DE.

So với trường hợp 1 thì chỉ số tổ hợp giảm đi 1, ta làm tương tự và có:

 hình.

• **Trường hợp 3**: Các cạnh hình hành nằm trên GF nhưng không thuộc MN và DE hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc GF.

Tương tự ta có  hình.

• **Trường hợp 4**: Các cạnh hình hành nằm trên HI nhưng không thuộc MN, DE và GF hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc HI.

Ta có  hình.

Số các hình bình hành trong bốn trường hợp là: 54 + 28 + 12 + 3 = 97 hình.

Vậy xác suất cần tìm là: .

**Lưu ý:**

Đề bài yêu cầu các đỉnh hình bình hành nằm trong miền trong của tam giác ABC nên số hình bình hành là tương đối nhỏ. Nếu các đỉnh hình hành không ngoài tam giác ABC thì sẽ nhiều hình hơn.

**Câu 3b (*1,0 điểm*).**  Tìm công sai *d* của cấp số cộng  có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn: .

**Hướng dẫn**

Từ phương trình đầu của hệ ta có: 

 thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

. Đặt , ta có phương trình: . Do đó 

Vậy 

**Câu 4 (3,0 điểm).**

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*), *SA* = *a*. Một mặt phẳng  qua *CD* cắt *SA, SB* lần lượt tại *M, N*. Đặt AM = *x*, với .

a. Tứ giác *MNCD* là hình gì? Tính diện tích tứ giác *MNCD* theo *a* và *x*.

b. Xác định *x* để thể tích khối chóp *S.MNCD* bằng  lần thể tích khối chóp *S.ABCD*.

**Hướng dẫn**

a. Tứ giác *MNCD* là hình gì? Tính diện tích tứ giác *MNCD* theo *a* và *x*.

Vì *ABCD* là hình vuông nên AB // CD, suy ra AB //  do đó AB // MN hay ta có *MNCD* là hình thang. Mặt khác: *CD* *AD*, *CD* *SA* nên *CD* mp(*SAD*) suy ra MN (SAD) suy ra MN MD.

Vậy tứ giác MNCD là hình thang vuông tại D và M.

Từ đó ta có DM là đường cao của hình thang MNCD.

Ta có  và *MA* = *x* nên . Do đó ta tính diện tích *MNCD* là: .



b. Xác định *x* để thể tích khối chóp *S.MNCD* bằng  lần thể tích khối chóp *S.ABCD*.

Ta có  (1). Kẻ *SH* vuông góc với *DM*, (*H* thuộc *DM*), ta có:

*MN* (*SAD*) (theo chứng minh câu a) nên *MN* *SH*, suy ra *SH* (*MNCD*), từ đó *SH* là đường cao của khối chóp *S.MNCD*.

Trong hai tam giác vuông đồng dạng *SHM* và *DAM* ta có:

 do đó thể tích của khối chóp *S.MNCD* là:

 (2).

Từ (1), (2) và yêu cầu bài toán ta có phương trình: 

.

Vậy với  thì thể tích khối chóp *S.MNCD* bằng  lần thể tích khối chóp *S.ABCD*.

**Câu 5a (*0,5 điểm*)**. Cho các số thực phân biệt . Chứng minh rằng: .

**Hướng dẫn**

Đặt . Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

 (\*).

Nếu  thì  đúng.

Nếu  thì  đúng. Vậy ta có điều cần chứng minh.

**Câu 5b (*0,5 điểm*)**. Cho các số thực . Chứng minh rằng: .

**Hướng dẫn**

Áp dụng bất đẳng thức trong câu 5a, ta có:

.

Lặp lại lần nữa:



.

Cứ tiếp tục lặp lại như thế ta lần lượt thay được cơ số ngoài cùng của logarit và số lấy logarit trong cùng (chú ý mỗi lần thay thì cơ số  không đổi), ký hiệu vế trái là P, cuối cùng ta có:

 (đpcm).

**---------- HẾT ----------**