|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **QUẢNG NAM**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI THPT CHUYÊN**  **VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**  **Năm học 2019 – 2020** |
| *(Đề thi gồm có 01 trang)* | **Môn thi** : TOÁN  **Thời gian** :180 phút (*Không kể thời gian giao đề*)  **Ngày thi**: 09/10/2019 |

**Câu 1.** (***3,0*** ***điểm*)** Giải phương trình: .

**Câu 2.** (***2,0* *điểm*)** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương *n* thì phương trình



luôn có một nghiệm dương duy nhất. Ký hiệu nghiệm dương đó là , chứng minh rằng dãy số  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Câu 3.** (***5,0* *điểm*)** Cho tam giác *ABC* nhọn, không cân nội tiếp đường tròn tâm *O*. Điểm *M* di động trên cạnh *BC (*). Gọi *(X)*, (*Y)* lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác *MAB* và *MAC*. Lấy điểm *S* thuộc (*X*) sao cho *MS* song song với *AB*; lấy điểm *T* thuộc (*Y*) sao cho *MT* song song với *AC*.

a) Chứng minh rằng các điểm *A, O, T, S* nằm trên một đường tròn.

b) Gọi *E* là giao điểm khác *A* của (*X*) và *AC*, *F* là giao điểm khác *A* của (*Y*) và *AB*. Các đường thẳng *BE* và *CF* cắt nhau tại *N*. Chứng minh rằng đường thẳng *MN* đi qua *O* khi và chỉ khi *AM* đi qua tâm đường tròn Ơ-le của tam giác *ABC*.

**Câu 4. (*2,0 điểm*)** Cho *p* là một số nguyên tố, *p* > 2 và các số nguyên  theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai không chia hết cho *p*. Chứng minh rằng tồn tại một chỉ số *k* thuộc tập  sao cho  chia hết cho .

**Câu 5. (*3,0 điểm*)** Tìm tất cả các đa thức  hệ số thực thỏa mãn điều kiện:

 với mọi .

**Câu 6. (*2,0 điểm*)** Tìm tất cả các số tự nhiên *n* với  sao cho trên mặt phẳng tồn tại *n* điểm phân biệt, mỗi điểm được gán một số thực dương mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong chúng bằng tổng hai số được gán ở hai điểm đó.

**Câu 7. (*3,0 điểm*)** Cho các số thực dương  thỏa mãn . Chứng minh rằng

.

**−−−−−−−−−−−HẾT −−−−−−−−−−−**

* *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
* *Giám thị không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ...............................................................Số báo danh:........................

|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **QUẢNG NAM** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI THPT CHUYÊN**  **VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**  **Năm học 2019-2020** |

**HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN**

**Môn: TOÁN**

***(Hướng dẫn chấm này gồm có 7 trang)***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung yêu cầu** | **Điểm** |
| **Câu 1**  **(3,0đ)** |  |  |
|  | Phương trình ⇔  (1) | **0,5** |
| Xét hàm số . (*0.25)* | **0,75** |
| Chứng minh được  là hàm số đồng biến trên . (*0.5)* |
| Phương trình (1) trở thành:  ⇔  ⇔  (2) | **0,5** |
| Xét hàm số  trên .  Ta có ,  Bảng biến thiên của  trên :    *x* - -1 1 +  *g’(x)* + 0 - 0 +  -1 +  *g(x)*  - -5 | **0,25** |
| Từ bảng biến thiên và  ta thấy phương trình  chỉ có một nghiệm duy nhất trên . (*0.25)* | **0,5** |
| Với , đặt  trong đó *t* > 0. (*0.25)* |
| Thay vào phương trình (2) được . (*0.25)* | **0,5** |
| Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất . (*0.25)* |
| **Câu 2**  **(2,0đ)** |  |  |
|  | Đặt , . Với mỗi  ta có  là hàm số liên tục, đồng biến trên . *(0.25)* | **0,5** |
| Lại có  và  nên phương trình  có nghiệm duy nhất . *(0.25)* |
| Với *n* = 1 thì ta có ; với  ta có . *(0.25)* | **0,5** |
| Với  thì  suy ra . Do đó , . *(0.25)* |
| Hơn nữa với mỗi  thì . *(0.25)* | **0,5** |
| Suy ra  hay  là dãy số đơn điệu giảm, vì vậy dãy  có giới hạn hữu hạn. *(0.25)* |
| Đặt , . Từ giả thiết, với  thì  ⇔ . *(0.25)* | **0,5** |
| Lấy giới hạn ta được  ⇔. Vậy  *(0,25)* |
| **Câu 3**  **(5,0đ)** |  |  |
| **a)**  **(3,0đ)** | Xét trường hợp bài toán như hình vẽ, các trường hợp khác tương tự |  |
| Tứ giác *ATMC* nội tiếp có *AC//TM* nên *ATMC* là hình thang cân, suy ra  *(0.25)* | **0,5** |
| Tương tự, *ASMB* cũng là hình thang cân nên . *(0.25)* |
| Lại có (góc có cạnh tương ứng song song) | **0,5** |
| Ta có (do tứ giác nội tiếp) *(0.25)* | **0,5** |
| Suy ra trong tứ giác *ATMS* có    (1) (*0.25)* |
| Do *O* nằm trên trung trực của *AC* và *ATMC* là hình thang cân nên *O* cũng nằm trên trung trực của *MT* . *(0.25)* | **0,5** |
| Tương tự thì *O* cũng nằm trên trung trực của *MS* nên *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MTS*. *(0.25)* |
| Suy ra  . (2) | **0,5** |
| Từ (1) và (2) ta có  hay *ATOS* là tứ giác nội tiếp. | **0,5** |
| **b)**  **(2,0 đ)** | Gọi *H* là trực tâm tam giác *ABC* và *I* là tâm đường tròn Ơ-le của tam giác *ABC* thì ta có *I* là trung điểm của *OH*. | **0,5** |
| Đường thẳng qua *O*, vuông góc *BC* cắt *BC* tại *P* và cắt *AI* tại *Q*. Khi đó ta có *AHQO* là hình bình hành nên *OQ = AH = 2OP* nên *Q* đối xứng với *O* qua *BC*. *(0.25)* | **0,5** |
| Do đó  (3). *(0.25)* |
|  |  |
| Lại có  nên tứ giác *CMNE* nội tiếp. *(0.25)* | **0,5** |
| Suy ra . (4) *(0.25)* |
| Từ đó (3) và (4) ta có:  Đường thẳng *MN* đi qua *O* ⇔  ⇔ *(0,25)* | **0,5** |
| ⇔ *A,M,Q* thẳng hàng ⇔ *AM* qua *I*. *(0.25)* |
| **Câu 4**  **(2,0đ)** |  |  |
|  | Gọi *d* là công sai của cấp số cộng. Ta có  với mọi .  Do *d* không chia hết cho *p* nên các số  có số dư khi chia cho *p* đôi một khác nhau.  (Hay  lập thành một hệ thặng dư đầy đủ theo modulo ). *(0.25)* | **0,5** |
| Suy ra tồn tại  mà , các số  còn lại với  có số dư khi chia cho *p* là  theo một thứ tự nào đó. *(0.25)* |
| Xét tích các số này ta có . | **0,5** |
| Mặt khác do *p* nguyên tố nên ta có định lí Wilson:  (mod *p*). | **0,5** |
| Từ đó ta có  hay . *(0.25)* | **0,5** |
| Lại do  nên suy ra  chia hết cho . *(0.25)* |
| **Câu 5**  **(3,0đ)** |  |  |
|  | Giả sử đa thức  thỏa mãn  (1) với mọi .  **Trường hợp 1.**  là hằng số, đặt .  Thay vào (1) ta được  Thử lại thấy thỏa mãn. | **0,5** |
| **Trường hợp 2.**  không phải là hằng số, đặt  và  là hệ số bậc cao nhất của . Ta có thể viết  trong đó  là đa thức hệ số thực có . *(0.25)* | **0,75** |
| Cân bằng hệ số của bậc cao nhất (bậc 3*n*) trong (1) ta có . *(0.5)* |
| ***+) Nếu ,*** ta có . Thay vào (1) ta được    ⇔  (2) *(0.25)* | **0,5** |
| Trong (2), nếu thì bậc của VT là 2*n* + *k*, bậc của VP là  nên cân bằng bậc ta phải có . Vô lý vì  và . Do vậy *k* = 0, ta đặt . *(0.25)* |
| Thay vào (2) đi đến  =  ⇔  (3). *(0.25)* | **0,5** |
| Đẳng thức (3) đúng với mọi  ⇔  ⇔ .  Khi đó ta có . Thử lại thỏa mãn.  *(0.25)* |
| ***+) Nếu ,*** ta có . Thay vào (1) ta được    ⇔  =  (4)  Trong (4), nếu thì bậc của VT là 2*n* + *k*, bậc của VP là *h* ≤ nên cân bằng bậc hai vế đi đến . Điều này vô lý vì  và . Do đó *k* = 0, ta đặt . | **0,25** |
| Thay vào (4) đi đến  =  ⇔  (5) *(0.25)* | **0,5** |
| Đẳng thức (5) đúng với mọi  ⇔  ⇔ .  Khi đó ta có . Thử lại thỏa mãn.  Đáp số: ;;. *(0.25)* |
| **Câu 6**  **(2,0đ)** |  |  |
|  | + Với , gán  tương ứng với các số dương . Khi đó .  + Với , chẳng hạn đều và gán ba đỉnh cùng số dương .  Khi đó . | **0,25** |
| + Với *n* = 4 ta chọn trên mặt phẳng bốn điểm trong đó ba điểm là ba đỉnh của một tam giác đều có cạnh bằng 1, mỗi điểm gán số ; điểm còn lại là tâm của tam giác đều đó và gắn số  thì bốn điểm này thỏa mãn bài toán thỏa mãn.  *(Trong bốn điểm trên nếu bỏ đi một hoặc hai điểm cùng với số gán với nó thì ba điểm hoặc hai điểm còn lại cũng thỏa mãn, do đó n = 2, n = 3 thỏa mãn*.) | **0,25** |
| + Với *n* = 5. Giả sử có 5 điểm *A, B, C, D, E* cùng với các số dương gắn với chúng lần lượt là *a, b, c, d, e* thỏa mãn bài toán.  Nếu có 3 điểm trong chúng thẳng hàng, giả sử là *A, B, C* theo thứ tự đó. Khi đó ta có *AB + BC = AC* nên *(a + b) + (b + c) = (a + c)* ⇒ *b* = 0 vô lý. Như vậy trong 5 điểm đó không có ba điểm nào thẳng hàng. | **0,5** |
| Nếu có 4 điểm trong chúng tạo thành một tứ giác lồi, giả sử là tứ giác lồi *ABCD*. Khi đó theo giả thiết thì *AC + BD = (a + c) + (b + d) = AD + BC*.  Mặt khác, gọi *I* là giao điểm hai đường chéo *AC, BD* thì ta có  *AC + BD = (AI + IC) + (BI + ID) = (AI + ID) + (BI + IC) > AD + BC.*  Điều này mâu thuẫn nên tất cả các bộ 4 điểm đều chỉ tạo thành tứ giác lõm. | **0,5** |
| Xét 4 điểm *A, B, C, D* tạo thành tứ giác lõm trong đó *D* nằm trong tam giác *ABC*. Khi đó điểm *E* nằm ở đâu cũng có ít nhất một bộ 4 điểm tạo thành một tứ giác lồi nên không thỏa mãn (có thể vẽ hình minh họa).  Vậy *n* = 5 không thỏa mãn bài toán, do đó mọi  cũng không thỏa mãn.  Như vậy các giá trị cần tìm của *n* là 2, 3, 4. | **0,5** |
| **Câu 7**  **(3,0đ)** |  |  |
|  | Đặt  Ta có  (*0.5)* | **0,75** |
| Ta có biến đổi:  .  BĐT đã cho trở thành . (1) (*0.25)* |
| Ta sẽ chứng minh BĐT Schur  Bổ đề: *“* *với mọi ”* (\*)  Thật vậy, do  nên không thể có quá một trong ba thừa số ở vế trái âm. Nếu có một thừa số âm, BĐT hiển nhiên đúng. Nếu cả ba thừa số không âm, ta có  (BĐT AM – GM)  cùng với hai BĐT tương tự, nhân lại ta có BĐT được chứng minh. *(0.5)* | **0,75** |
| Ta có  *(0.25)* |
| **Trường hợp 1.** Nếu , khi đó  nên  nên BĐT (1) đúng. | **0,5** |
| **Trường hợp 2.** Nếu  và thì từ BĐT Schur nói trên ta có | **0,5** |
| Do đó:    suy ra BĐT (2) đúng.  Vậy BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra ⇔ *x = y = z* = 1. | **0,5** |

**Lưu ý: *Thí sinh giải khác đáp án và lập luận đúng vẫn đạt điểm tối đa phần đó*.**

**HƯỚNG GIẢI KHÁC**

**-------------**

**Câu 1**

Đặt ****.  **0.5 đ**

Ta có hệ phương trình:  **0.25 đ**

Trừ vế theo vế hai phương trình trên ta được . **0.5 đ**

Do  nên . **0.5 đ**

Phương trình thành .

Phương trình  có dạng  (với ).

Đặt  . Thay vào phương trình  ta được





.

Chọn . Khi đó ta có hệ phương trình . **0.25 đ**

Suy ra  là nghiệm của phương trình . **0.5 đ**

Ta có  **0.5 đ**

**Câu 7.** Xét hàm số .

; .

Lập bảng biến thiên của  trên ta thu được

.

Khi đó .  **1.0 đ**